Andréia Büttner Ciani
Arleni Elise Sella Langer
Dulcyene Maria Ribeiro
Francieli Agostinetto Antunes
Tânia Stella Bassoi
Organizadoras

PROPOSTAS DIDÁTICAS DE MATEMÁTICA:
Uma Contribuição de Futuros Professores

unioeste
Universidade Estadual do Oeste do Paraná

PROPOSTAS DIDÁTICAS DE MATEMÁTICA:

UMA CONTRIBUIÇÃO DE FUTUROS PROFESSORES

Andréia Büttner Ciani
Arleni Elise Sella Langer
Dulcyene Maria Ribeiro
Francieli Agostinetto Antunes
Tânia Stella Bassoi

ORGANIZADORAS

PROPOSTAS DIDÁTICAS DE MATEMÁTICA:

UMA CONTRIBUIÇÃO DE FUTUROS PROFESSORES

EDITORA
Evangraf
LTDA.

Porto Alegre, 2013

Revisão:
As organizadoras.

Produção Gráfica e impressão:
Evangraf - (51) 3336.2466

Apoio Financeiro:
Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES

Realização:
Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência - PIBID/Unioeste
Rua Universitária, 1619 - Jardim Universitário - CEP 85819-100 - Cascavel-PR
E-mail: pibid@unioeste.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

P962 Propostas didáticas de matemática: uma contribuição de futuros professores / organizadores: Andréia Büttner Ciani... [et al]. – Porto Alegre : Evangraf/UNIOESTE, 2013. (Coleção PIBID).
80 p. ; 21 x 28cm.

ISBN 978-85-7727-514-4

1. Explorando a calculadora. 2. Multiplicação de números inteiros. 3. Áreas de figuras planas. 4. Potências. 5. Frações. 6. Fatoração do trinômio do segundo grau. I. Título. II. Ciani, Andréia Büttner. III. Pibid/Unioeste – Subprojeto de Matemática

CDU 513
CDD 510

(Bibliotecária responsável: Sabrina Leal Araujo – CRB 10/1507)

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Falar das unidades didáticas apresentadas nesta proposta[1], uma das ações do projeto **Vivenciando a escola: Incentivo à prática docente** vinculado ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência – PIBID/CAPES, fruto das experiências vividas nas escolas, pelos acadêmicos bolsistas[2], e discutidos nos encontros semanais com os professores supervisores, professores universitários responsáveis pela orientação, colegas de projeto, torna-se um compromisso compartilhado.

À primeira vista, pode parecer um trabalho ingênuo, mas ele se mostrou determinante para que os acadêmicos bolsistas assumissem a preparação das aulas, experiência inédita para muitos deles.

As dificuldades no estabelecimento de objetivos, da metodologia a ser utilizada e das formas de avaliação de cada unidade, geraram inúmeras reescritas dessas unidades pelos alunos bolsistas. Estas incidiam sobre o repensar e reescrever, hábitos que a escola "esqueceu" de desenvolver, principalmente com o advento da internet.

A elaboração e a apresentação de cada unidade para os demais grupos revelaram resultados significativos para o processo de ensino e aprendizagem do futuro professor, incluindo sugestões de aplicação nas escolas envolvidas no projeto. Assim, os alunos serão inseridos nos primórdios da pesquisa, tornando-se professores pesquisadores. O projeto PIBID é um espaço rico que permite a convivência de ensino, extensão e pesquisa, simultaneamente.

Esta ação proporcionará o amadurecimento do processo de aquisição do conhecimento necessário para ser um professor, oportunizará aos acadêmicos bolsistas, bem como aos professores supervisores, acréscimos em suas formações, com o objetivo primordial de motivá-los à continuidade e ao comprometimento com a docência, bem como provocá-los a aprofundar seus estudos em nível de pós-graduação.

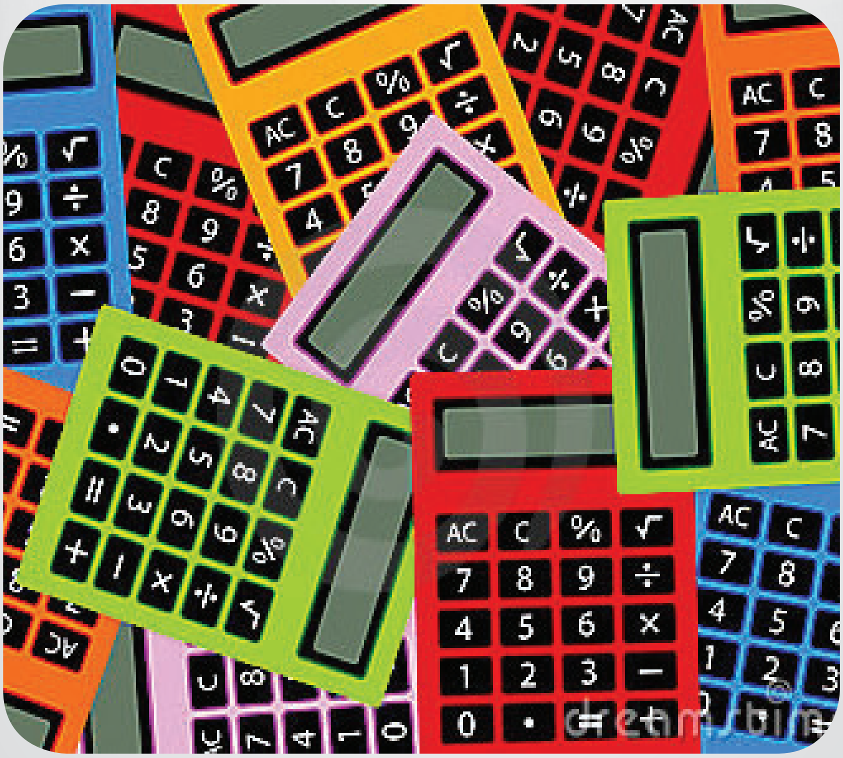
Profª.Dra. Tânia Stella Bassoi
Coordenadora de Área do Subprojeto de Matemática
do PIBID UNIOESTE

Profª. Msc. Arleni Elise Sella Langer
Profª. Dra. Andréia Büttner Ciani
Profª. Dra. Dulcyene Maria Ribeiro
Profª. Msc. Francieli Agostinetto Antunes
Professoras colaboradoras

1 A presente obra foi realizada com o apoio financeiro da CAPES, entidade do Governo Brasileiro voltada para a formação de recursos humanos.
2 Beneficiários de auxilio financeiro da CAPES-Brasil

EXPLORANDO A CALCULADORA

ALINE KIESKOSKI
JACQUELINE GABRIELA CANTÚ



OBJETIVO:

- Apresentar situações problemas com o intuito de explorar conceitos matemáticos utilizando calculadora simples.

INTRODUÇÃO

Nesta unidade didática apresentaremos algumas maneiras de explorar conceitos matemáticos por meio de funções da calculadora simples adotando uma perspectiva crítica e reflexiva, com atividades elaboradas em forma de situações problemas.

Estas atividades contribuem para o desenvolvimento do raciocínio lógico por gerarem condições críticas e reflexivas para resolver problemas e tomar decisões, tais como a escolha de cálculos mais adequados para situações do dia a dia.

De maneira geral, podemos falar em quatro maneiras de calcular que podem ser exploradas e exercitadas na escola: o cálculo escrito (algoritmos), o cálculo mental exato, o cálculo mental aproximado (estimativas) e o cálculo com ferramentas de apoio, como a calculadora.

PROCESSO HISTÓRICO

Os primeiros indícios de contagem realizada pelo homem remontam à Pré-História, período em que era comum o uso dos dedos das mãos para contagens. Segundo Eves (2011) é provável que a maneira mais antiga de contar se baseasse em algum método de registro simples, empregando o princípio da correspondência biunívoca. Por exemplo, para a contagem de carneiros, podia-se dobrar um dedo para cada animal, ou podia-se contar fazendo ranhuras no barro ou numa pedra, produzindo-se entalhes num pedaço de madeira ou fazendo-se nós numa corda.

No entanto, o ato de contar quantidades cada vez maiores fez com que o homem desenvolvesse instrumentos que o auxiliassem e facilitassem sua vida.

Por exemplo, o ábaco é considerado como a primeira máquina de calcular (DAVIS, 1992). Ainda hoje é utilizado por professores no ensino da matemática no Japão. Aqui no Brasil ele é usado por algumas pessoas para desenvolver o raciocínio lógico e como calculadora pelos deficientes visuais.

Segundo Caetano (2005), no ano de 1623, Wilhelm Schickard (1592-1635) desenvolveu uma máquina calculadora que efetuava quatro operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) e chamou-a de *Calculating Clock*.

Em 1642 Blaise Pascal (1623-1662) inventou a primeira calculadora mecânica de duas operações chamada *Pascaline*, "máquina de calcular que utilizava rodas dentadas, e podia realizar a adição e a subtração" (SOUZA, 2005, p. 164). Segundo Eves (2011, p.362), Pascal inventou esta máquina para ajudar seu pai nas funções de fiscal do governo em Rouen. Este instrumento podia operar números de até seis dígitos, sendo que este foi o protótipo das atuais máquinas de calcular (EVES, 2011, p.685).

O alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1671) e o inglês Sir Samuel Morland (1673) inventaram máquinas que multiplicavam. Em 1820 Thomas de Colmar transformou a máquina de Leibniz em outra capaz de subtrair e dividir, conforme Eves (2011, p.685).

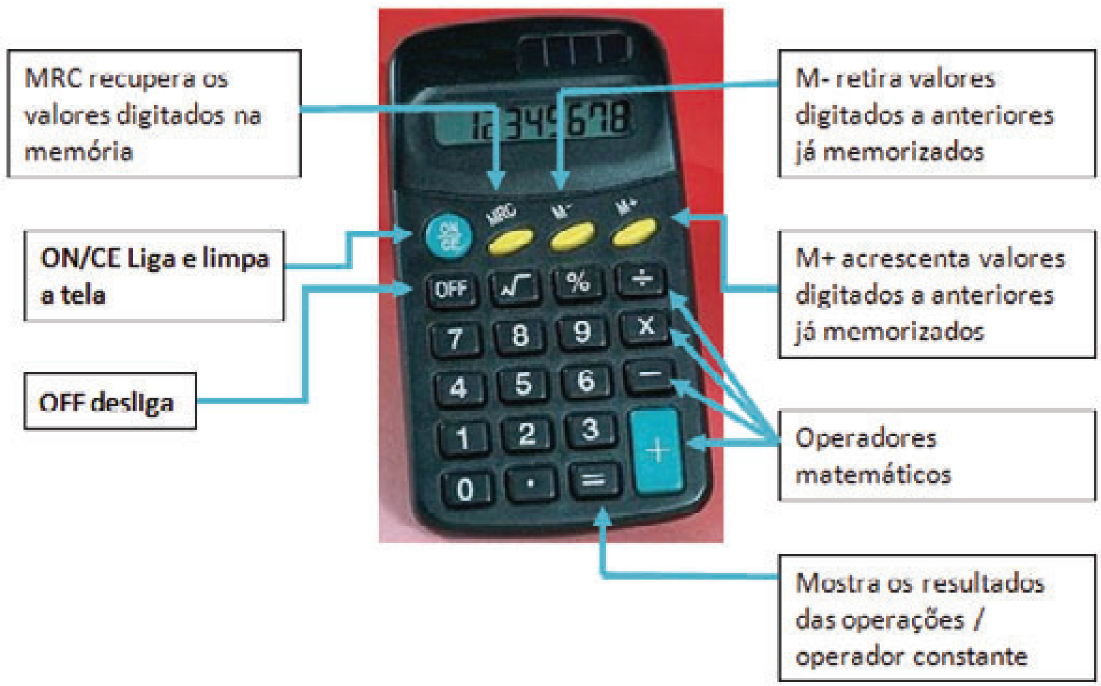
> Em 1855, Charles-Xavier Thomas de Colmar desenvolveu uma máquina portátil, denominada "aritmômetro", baseada no modelo de Leibniz, e que podia realizar as quatro operações aritméticas com precisão. É considerada a primeira máquina de calcular comercializada com sucesso (SOUZA, 2005, p. 165).

A patente da primeira máquina de calcular capaz de efetuar as quatro operações fundamentais foi registrada em 1875 pelo americano Frank Stephen Baldwin (EVES, 2011, p.685).

Atualmente, encontramos diversos tipos de calculadoras que são utilizadas para facilitar o dia a dia nos diversos setores. Pelo baixo preço, devido à produção em alta escala, a calculadora simples é de fácil acesso à grande maioria da população.

A CALCULADORA SIMPLES

Segue um dos modelos da calculadora comum.



Alguns educadores resistem em utilizar a calculadora em sala de aula. Por meio deste trabalho apresentaremos algumas sugestões de atividades para auxiliar os professores e incentivar o uso deste instrumento em sala de aula.

O objetivo destas atividades é que os alunos conheçam as teclas e algumas funções da calculadora simples, de forma que sejam capazes de resolver problemas, raciocinar e modelar situações recorrendo a conceitos já estudados.

ATIVIDADES PROPOSTAS

As atividades que seguem vão lhe ajudar a explorar conceitos matemáticos com o auxílio da calculadora. Sugerimos que o cálculo mental e a estimativa sejam desenvolvidos juntamente com o recurso desta ferramenta didática.

ATIVIDADE 1

Arredonda ou trunca?

Numa partida de basquete entre Brasil e Argentina foram marcadas em média cinco cestas a cada três minutos jogados.

Escreva a razão entre o número de cestas marcadas a cada três minutos jogados e transforme em número decimal, descobrindo se a sua calculadora arredonda ou trunca o resultado.

LEMBRE-SE ...

Truncamento: ignora os dígitos restantes a partir de uma quantidade de casas decimais.

Arredondamento: soma-se um ao dígito anterior caso ele seja maior ou igual a cinco, ou mantém o valor se for menor que cinco.

O objetivo desta atividade é reconhecer se a sua calculadora arredonda ou trunca os resultados.

ATIVIDADE 2

Usando a calculadora, realize as operações que seguem e observe o que acontece ao pressionar a tecla de igualdade repetidas vezes.

a) 0+2=   b) 2+0=   c)74+5=   d) 74-5=

e) 10-2=   f) 62:2=   g) 1x4=   h) 4x5=

Com esta atividade é possível explorar diferentes conceitos, por exemplo, na letra *a* explorar os múltiplos de dois e na letra *h* os múltiplos de cinco. Já na letra *b* explorar que somar zero não altera o resultado. Nas letras *d* e *e* explorar o conceito dos números inteiros negativos e na letra *f* explorar o conceito dos números decimais.

ATIVIDADE 3

Descubra o número desconhecido.

a) ? + 376 = 1000

b) ? – 784 = 3500

c) 786 + ? = 1250

d) 555 - ? = 26

O objetivo desta atividade é explorar a ideia de resolução de equação por meio da operação inversa.

ATIVIDADE 4

Resolva as operações que seguem no papel e posteriormente na calculadora. Compare os resultados.

a) 13 ÷ 2 =

b) 17 ÷ 5 =

c) 19 ÷ 8 =

d) 21 ÷ 2 =

e) 0 : 6 =

f) 8 : 0 =

O objetivo desta atividade é discutir o que acontece com o resto da divisão quando usamos a calculadora. O aluno deve perceber que a calculadora divide novamente o resto, resultando num número decimal. Na letra *f* explorar em que conjunto numérico a calculadora opera, pois quando o aluno digitar a operação na calculadora apresentará erro.

ATIVIDADE 5

Um estudante digitou na calculadora simples 10 x 4 – 20 : 5 + 30 x 2 = e encontrou como resultado 68. Outro estudante resolveu no papel esta mesma operação e obteve como resultado 96.

Por que os resultados são diferentes?

Qual o resultado correto?

O objetivo desta atividade é introduzir conceitos relacionados às expressões numéricas e fazer com que os alunos percebam a importância da utilização de parênteses, chaves e colchetes. Além disso, o aluno deve perceber que a calculadora simples opera conforme a sequência que foi digitada.

ATIVIDADE 6

Quero multiplicar 15 por 7, no entanto, a tecla da multiplicação está quebrada. Como posso proceder?

O objetivo desta atividade é mostrar que a multiplicação é soma de parcelas iguais.

ATIVIDADE 7

Encontre uma maneira de registrar o número **1584** sem apertar as teclas: 1, 4, 5 e 8.

Um dos objetivos desta atividade é explorar a decomposição dos números. Os alunos podem resolver esta atividade de diferentes maneiras, por exemplo, somando várias parcelas até obter o número desejado, ou então utilizando as operações de diferença, multiplicação e divisão. Vale ressaltar, que pode ser utilizada mais que uma operação.

ATIVIDADE 8

A praça de certa cidade possui as seguintes medidas: 22m de comprimento e 15m de largura. Sem utilizar os números 22 e 15, calcule a área total desta praça.

O objetivo desta atividade é
explorar a ideia de decomposição de área.

ATIVIDADE 9

Mariana tem uma calculadora em que somente a tecla do número 4 funciona. Apesar disso, ela fez aparecer 7 no visor. Tente descobrir como ela fez isso.

O objetivo desta atividade é
trabalhar com os múltiplos comuns a 4 e 7.

ATIVIDADE 10

Estime o valor da operação 12,5 : 4 e em seguida, utilizando a calculadora, verifique se obteve uma boa aproximação.

O objetivo desta atividade é explorar a capacidade de estimar resultados
e não se apoiar totalmente na calculadora, para que se habitue
a refletir sobre os resultados obtidos.

REFERÊNCIAS

CAETANO, R. S. **O uso da calculadora como recurso didático nas aulas de matemática.** 2005**.** Curso de curta duração ministrado/Extensão. Disponível em: <http://pt.scribd.com/doc/50275899/Minicurso-Calculadora-EdMatematica>. Acesso em: 25 nov. 2011.

DAVIS, H. T. **História da computação**. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas, Editora da Unicamp, 2011.

SELVA, A. C.; BORBA, R. E. S. R. **O uso da calculadora nos anos iniciais do ensino fundamental.** Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

SOUZA, S. R. Das mãos às máquinas: o desenvolvimento de mecanismos de contagem. In: **Vale Arte, Ciência, Cultura**. n. 4, nov. 2005, p. 159-167.

SOBRE AS AUTORAS

Aline Kieskoski

Acadêmica do curso de Licenciatura em Matemática da UNIOESTE – câmpus de Cascavel.

Jacqueline Gabriela Cantú

Licenciada em Matemática pela UNIOESTE – câmpus de Cascavel. Mestranda do Programa de Pós-Graduação de Engenharia Agrícola da Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE / Cascavel.

UMA PROPOSTA HISTÓRICA, ANALÍTICA E COMPUTACIONAL PARA MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS

DANIEL ZAMPIERI LOUREIRO
DANIELY RAQUEL GHIROTTO
DIOGO LEANDRO PIANO

OBJETIVOS:

- Compreender a multiplicação de números inteiros geometricamente.
- Entender a regra dos sinais.

INTRODUÇÃO

Usualmente as regras de sinais são ensinadas de maneira mecânica, como uma regra mesmo e os alunos têm dificuldades em compreender a validade dessas regras. Em um minicurso que participamos em uma das edições da Semana Acadêmica de Matemática da Unioeste Câmpus Cascavel, foi apresentado o livro: "Multiplicação e divisão de números inteiros: uma proposta para a formação de professores de Matemática" de Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino e Regina Célia Guapo Pasquini. Naquele momento, nos foi mostrado o significado geométrico da multiplicação de números inteiros usando segmentos. As construções foram feitas usando papel quadriculado, régua, esquadro, lápis e borracha. Identificamo-nos com o trabalho que foi apresentado por Regina Pasquini, uma das autoras do livro e, resolvemos propor este trabalho que se refere à multiplicação de números inteiros e a regra de sinais para a multiplicação, com base nas ideias propostas pelas autoras no livro já referido, porém acrescentando a possibilidade em utilizar o software Geogebra 3.2 e um breve apanhado histórico da origem dos números negativos. Esperamos com este trabalho levar os alunos a compreender a regra de sinais, especialmente no que se refere à multiplicação.

UMA BREVE HISTÓRIA SOBRE A ORIGEM DOS NÚMEROS NEGATIVOS

O desenvolvimento da matemática se constituiu do legado de diversos estudiosos, que de tempos em tempos, fizeram inserções significativas tais como as notações e os símbolos. Foram necessários milhares de anos, para se chegar ao rigor matemático e ao registro simbólico que conhecemos hoje.

O surgimento dos números ocorreu pela necessidade de contar objetos, contar animais, medir quantias de terra, entre outros empregos na vivência do homem. Na história da matemática a ideia de números foi alvo de discussão por períodos de longa abrangência, pois os antigos matemáticos não conseguiam explicar o emprego de alguns números como exemplo, os números negativos.

> A humanidade lutou durante milênios com sistemas inadequados e inoperantes [...] também na impossibilidade de conceber os números

> "negativos" (-1, -2, -3, -4 etc.), dos quais nos servimos correntemente hoje em dia para exprimir, por exemplo, uma temperatura abaixo de zero, ou ainda um saldo devedor numa conta bancária. Assim, durante muito tempo uma subtração como 3 - 5 foi considerada impossível. Sabemos como a descoberta do zero varreu este obstáculo e permitiu, de acordo com a famosa "regra dos sinais", a extensão dos números aritméticos ordinários (ditos "naturais") até os números "relativos", por adjunção a eles de seus "simétricos" em relação a zero (IFRAH, 1998, p. 337).

Diofanto (Séc. III) não teve problemas para operar com os números negativos. Eles apareciam constantemente em seus cálculos nos quais as soluções eram valores inteiros negativos como, por exemplo:

1) $4 = 4x + 20 \Rightarrow x = -4$

2) $2x + 10 = 6 \Rightarrow x = -2$

No entanto, de acordo com Eves (2004, p. 207), Diofanto "preferia" as respostas positivas. Por exemplo, na resolução de um problema que levasse a uma equação do tipo $x^2 + x - 6 = 0$, Diofanto descartaria a raiz negativa $x = -3$ e tomaria como resposta do problema, apenas a raiz positiva $x = 2$.

Tales de Mileto, matemático grego que viveu por volta de 600 a. C., considerava que

> [...] uma variável representava o comprimento de um segmento de reta, e **o produto entre duas variáveis a área de um retângulo.** Por exemplo, o produto entre os segmentos ***a*** e ***b*** representava a área de um retângulo com lados medindo ***a*** e ***b*** (CYRINO; PASQUINI, 2010, p. 18. Grifos como no original).

Os símbolos "+" e "-", que conhecemos hoje, foram introduzidos por volta de 1489, em um livro de aritmética comercial, por um professor alemão chamado Jonhann Widmann (nascido por volta de 1460 na Boêmia). Nesse livro, o símbolo "**+**" representava excesso e o símbolo "**-**" representava deficiência. Tais símbolos não possuíam significados de adição e subtração como nas operações matemáticas usuais. Essas operações, na época, eram indicadas pelas letras **p** (de piu, "mais") e **m** (de minus, "menos").

Nos séculos XVI e XVII, muitos matemáticos europeus não apreciavam os números negativos e, se esses números apareciam nos seus cálculos, eles os consideravam falsos ou impossíveis, evitando-os ao máximo. Exemplo disto foram os trabalhos de Michael Stifel (1487 - 1567). Stifel utilizou constantemente os números negativos em seus livros, contribuiu para difundir os símbolos "**+**" e "**-**" para representar os números positivos e negativos, mas mesmo assim, se recusou a admitir números negativos como raízes de uma equação, chamando-lhes de "números absurdos".

Cardano (1501 - 1576) utilizou os números negativos, mas referiu-se a eles como "numerificti"[1].

Euler foi quem demonstrou o "jogo dos sinais", ou seja, a relação que fazemos entre os sinais de mais e menos em cálculos matemáticos. Euler não conseguiu provar, ou mesmo justificar, de maneira coerente que relacionando ''menos'' com''menos'' resultava em ''mais''. Este tipo de argumentação mostra que Euler não tinha ainda conhecimentos suficientes para explicar estes resultados. Euler se referia aos números negativos como sendo apenas uma quantidade que poderia ser representada por uma letra precedida do sinal "-" (menos).

Descartes, naquela época, considerava que o produto entre duas variáveis poderia ser representado por um segmento de reta**.** Podemos reescrever da seguinte forma: o produto entre os segmentos **a** e **b** pode ser representado pelo segmento **c = ab.** Para Descartes:

> As linhas são símbolos mais simples que os números, porque se podem exprimir por linhas todas as relações de grandezas, ao passo que certas relações, como as de grandezas incomensuráveis entre si, não podem exprimir-se por números. Além disso, a proposição existente entre as duas linhas não está de modo algum limitada a estas próprias linhas, porque pode igualmente representar a mesma proporção existente entre dois números, entre duas superfícies ou entre dois sólidos (DESCARTES, 1979, p. 59 *apud* CYRINO; PASQUINI, 2010, p. 22).

Assim, Descartes nos mostra as possibilidades para um trabalho amparado na Geometria.

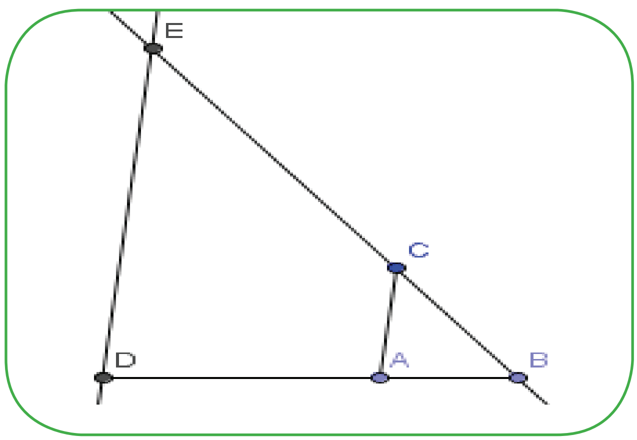
A situação se modificou a partir do século XVIII quando foi criada uma interpretação geométrica para os números positivos e negativos como sendo segmentos de direções opostas.

1 Número fictício

A MULTIPLICAÇÃO IDEALIZADA POR DESCARTES, BASEADA NO TEOREMA DE TALES E A PROPOSTA DE HILBERT

Seja, por exemplo, o segmento $\overline{AB}$ a unidade, e que se deva multiplicar o segmento $\overline{BD}$ por $\overline{BC}$. Para isso, é necessário unir os pontos A e C, depois determinar $\overline{DE}$ paralelo a $\overline{CA}$ sendo $\overline{BE}$ o produto desta multiplicação.

FIGURA 1 - Construção proposta por Descartes, baseado no Teorema de Tales.



A SEGUIR UM EXEMPLO NUMÉRICO...

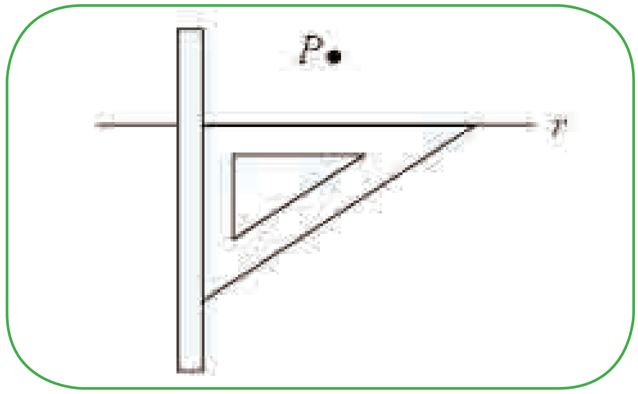
Seja $\overline{AB}$ o segmento de medida 1 unidade. ($\overline{AB} = 1$) e tomemos os segmentos de medidas 3 unidades e -2 unidades, respectivamente. Qual o significado que se pode atribuir à multiplicação das medidas destes segmentos?

Porém como os alunos saberão construir uma reta paralela à outra ou ainda, uma reta paralela a um segmento?

Esta construção, de uma reta paralela, deve ser realizada com régua e esquadro. Para isso siga os seguintes passos:

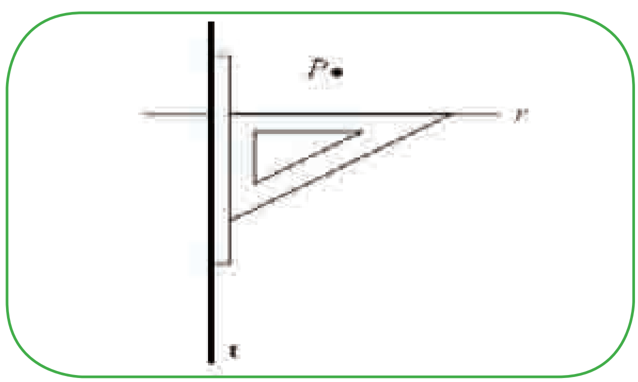
1º Passo: Trace uma reta *r* e marque um ponto P fora da reta. Posicione a régua e o esquadro conforme a figura a seguir:

FIGURA 2 – 1º passo.



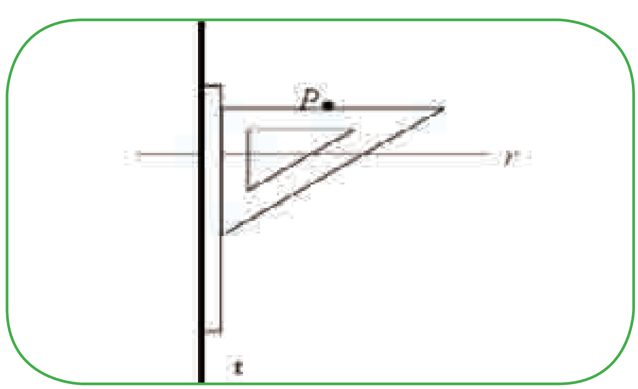
2º Passo: Trace do lado esquerdo da reta *r* uma reta *t* que será perpendicular a reta *r* por construção, desta forma:

FIGURA 3 – 2º passo.



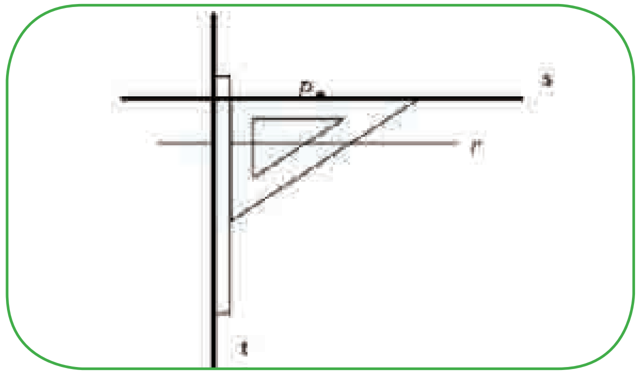
3º Passo: Fixe a régua de modo que fique conforme a figura anterior e deslize o esquadro pela régua até que ele encontre o ponto P.

FIGURA 4 – 3º passo



4º Passo: Trace a reta *s,* que passa pelo ponto P utilizando o esquadro na posição anterior. O resultado será:

FIGURA 5 – 4º passo



Desta forma, construímos as retas *r* e *s* paralelas.

Podemos dizer que duas retas são paralelas se estão em um mesmo plano e não possuem qualquer ponto em comum. Se as retas são coincidentes ("a mesma reta") elas também são consideradas paralelas.

O matemático David Hilbert (1862 – 1943) também considerou válida a operação com segmentos e apresentou a construção geométrica do produto da seguinte maneira:

> Para definir geometricamente o produto de um segmento *a* por outro *b*, servimo-nos da seguinte construção: Escolhemos primeiramente um segmento qualquer, fixo em tudo o que o segue, e designemo-lo por 1. Desloquemos para um dos lados dum ângulo recto e a partir de O, o segmento 1 e, além disso também a partir de O, o segmento *b*; em seguida desloquemos para o outro lado o segmento *a*. Unamos as extremidades dos segmentos 1 e *a* por uma recta e conduzamos uma paralela a esta recta pela extremidade do segmento *b*; esta determinará um segmento *c* no outro lado do ângulo: chamemos a este segmento *c* o produto do segmento a pelo segmento *b* e designamo-los por: $c = ab$ (HILBERT, 2003, p. 58 *apud* CYRINO;PASQUINI, 2010, p. 24).

Com base no descrito por Hilbert apresentaremos a construção[2], utilizando o exemplo numérico apresentado anteriormente:

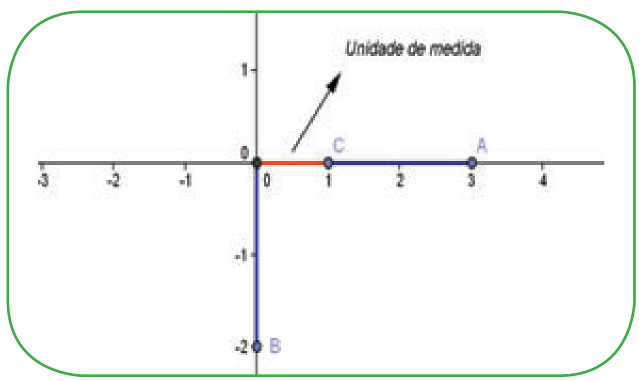
2 Todas as construções propostas nesta atividade foram feitas com o software Geogebra 3.2.

1º PASSO:

Queremos definir geometricamente o produto[3] de um segmento *a* por outro segmento *b.* Considere *a = 3 unidades* e *b = -2 unidades*.

Marque no plano cartesiano os pontos: C(1,0) que representa o segmento de medida 1 unidade (considerando 1 como unidade de medida); A(3,0) que representa o segmento de medida 3 unidades e o ponto B(0,-2) que representa o segmento de medida 2 unidades na parte negativa do eixo y, como podemos observar na figura a seguir.

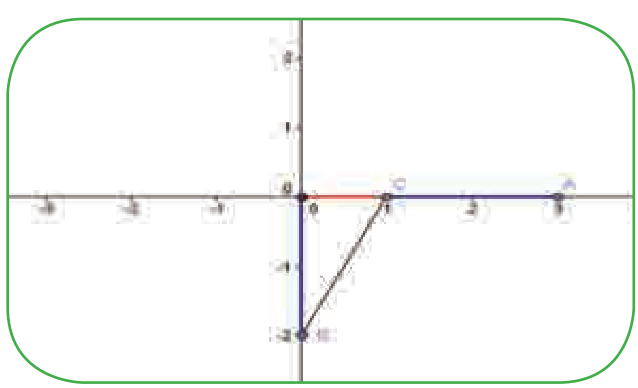
FIGURA 6 – Determinação da unidade de medida.



2º PASSO:

Construa o segmento com extremos nos pontos C e B, como na figura a seguir:

FIGURA 7 – Segmento com extremos nos pontos C e B.

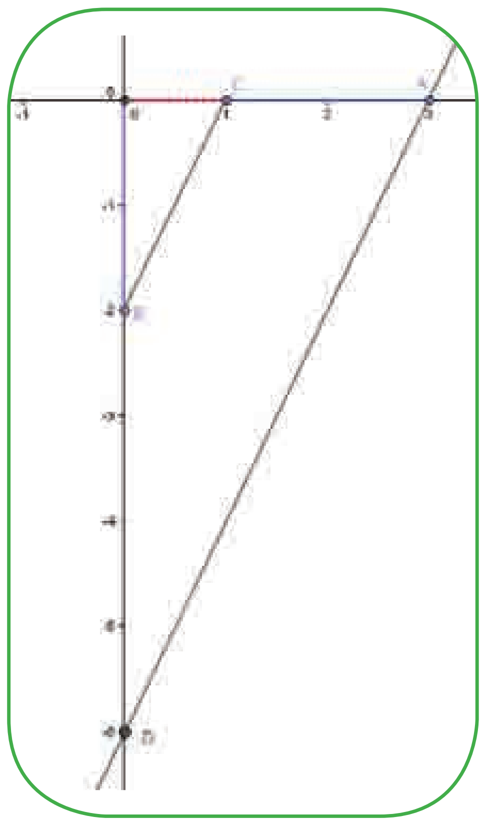


3 Quando multiplicamos dois segmentos de medidas a e b respectivamente estamos nos referindo ao valor numérico que tal segmento representa.

3º PASSO:

Construa uma reta paralela ao segmento $\overline{BC}$, passando pelo ponto A. Esta reta interceptará o eixo *y* no resultado da multiplicação dos segmentos de medidas *a* e *b* como segue:

FIGURA 8 – Construção da reta paralela ao segmento $\overline{BC}$.

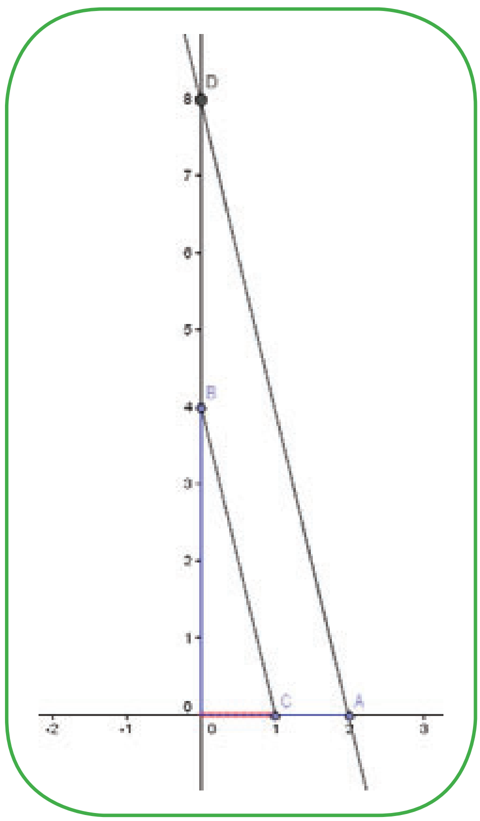


A distância do ponto O (zero) ao ponto -6 (menos seis, marcado no eixo das ordenadas) é o resultado da multiplicação do valor numérico dos segmentos que possuem 3 unidades e -2 unidades, ou ainda pode ser entendido como o valor numérico pelo qual a reta passa pelo eixo y, neste caso -6.

EXEMPLOS UTILIZANDO A PROPOSTA DE HILBERT

1) Multiplique os segmentos de medidas[4] 2 e 4. Mostre o resultado geometricamente.

FIGURA 9 - Multiplicação dos segmentos de medidas 2 e 4.

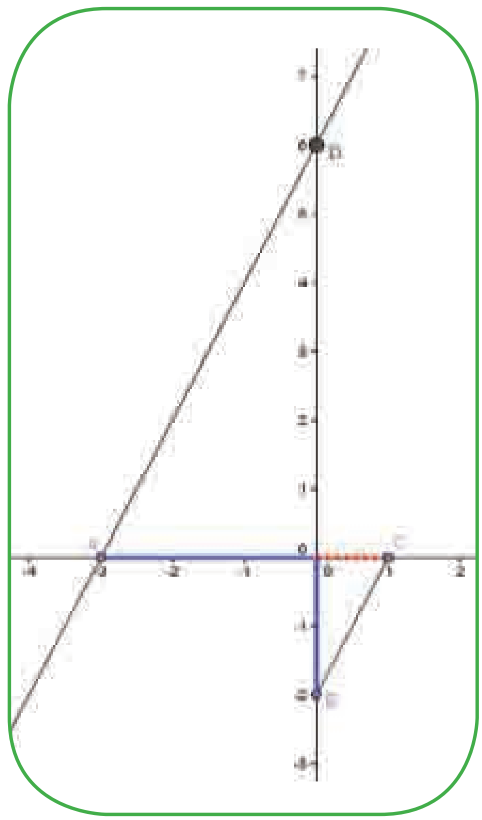


Observe que a multiplicação de dois números positivos resulta em um número positivo.

4 Neste caso optamos por colocar o segmento de medida quatro unidades no eixo y, e o segmento de duas unidades no eixo x, porém a ordem que as medidas forem dispostas sobre o eixo não interfere no resultado final. Lembrando ainda que a multiplicação é uma operação comutativa, ou seja, dados A e B temos: A.B=B.A, ou seja, a ordem dos fatores não altera o resultado do produto.

2) Multiplique os segmentos de medidas -3 e -2 utilizando o método de Hilbert apresentado anteriormente. Mostre o resultado geometricamente.

FIGURA 10 - Multiplicação dos segmentos de medidas -3 e -2.



Observe que a multiplicação de dois números negativos resulta em um número positivo.

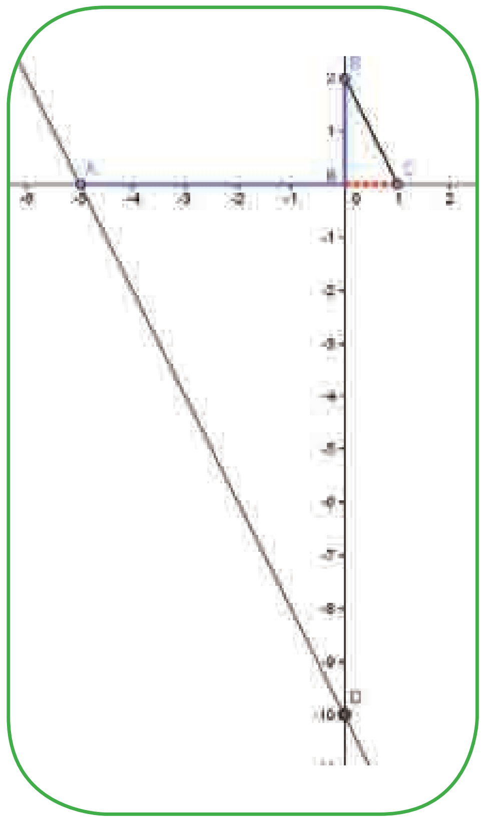
Deste momento em diante, usando a construção proposta por Hilbert, é possível fazer algumas indagações, *do ponto de vista gráfico*, para que os alunos sejam capazes de entender a multiplicação de números inteiros na forma geométrica e para que consigam levantar conjecturas sobre os resultados, como por exemplo:

i. Porque a multiplicação de dois números positivos resulta em um número positivo?

ii. Porque a multiplicação de dois números negativos, também resulta em um número positivo?

3) Multiplique os segmentos de medidas -5 e 2. Mostre o resultado geometricamente.

FIGURA 11 - Multiplicação dos segmentos de medidas -5 e 2.



Observe que a multiplicação de um número positivo por um número negativo resulta em um número negativo.

A construção geométrica pode ser explorada para justificar:

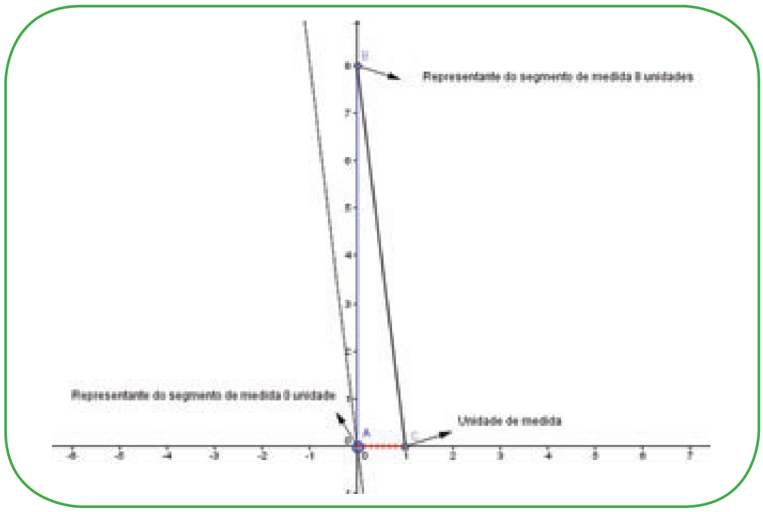
i. Porque a multiplicação de um número negativo por outro positivo resulta em um número negativo?

ii. Porque a multiplicação de um número positivo por outro negativo resulta em um número negativo?

Lembrando que no exemplo anterior, exemplo de 3), invertendo-se a ordem dos números e multiplicando o número positivo pelo número negativo não altera-se o resultado da multiplicação visto que a multiplicação é comutativa, logo teríamos o item ii).

4) Multiplique os segmentos de medidas 0 e 8. Mostre o resultado geometricamente.

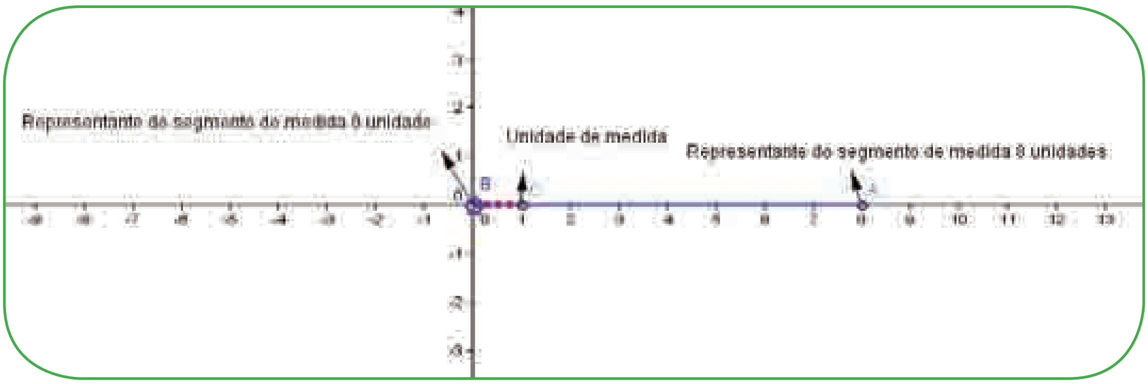
FIGURA 12– Multiplicação dos segmentos de medidas 0 e 8.



Note que feita a construção proposta por Hilbert traçando o segmento unindo os pontos (0,8), representante do segmento de 8 unidades, marcado no eixo y e (1,0), representante da unidade de medida, podemos perceber que ao traçarmos a reta paralela ao segmento construído passando pelo ponto (0,0), denominado na representação acima como A, obtemos uma reta que corta o eixo y no ponto (0,0), que é a origem do plano cartesiano. Assim o resultado desta multiplicação é 0 que corresponde ao valor numérico da coordenada em y.

Podemos ainda, representar a multiplicação dos segmentos de medidas 8 e 0 unidades conforme a figura seguinte, em que foram invertidos os valores nos eixos. Neste caso temos o segmento de 8 unidades marcado sobre o eixo x (8,0) e o segmento de 0 unidades no eixo y (0,0) . Pela construção proposta por Hilbert, unindo o ponto representante da unidade de medida (1,0) ao ponto representante do segmento de zero unidade (0,0) obtemos um segmento sobre o eixo x. Traçando agora, um segmento paralelo ao segmento construído anteriormente (marcado em vermelho na figura 13), passando pelo ponto (8,0) que representa o segmento de oito unidades, obtemos uma reta coincidente com o eixo x, a qual corta o eixo y apenas no ponto (0,0), ou seja, representa um segmento de zero unidade, assim o resultado da multiplicação também é zero. Desta forma temos o mesmo resultado da multiplicação de 0 e 8, porém com representações cartesianas distintas.

FIGURA 13– Multiplicação dos segmentos 8 e 0.



SUGESTÃO DE ATIVIDADES SEGUINDO A PROPOSTA DE HILBERT

1) Com o auxílio de régua e papel quadriculado faça as construções com a unidade de medida equivalente a 1 quadrado. Mostre o resultado geometricamente.

A. Multiplique os segmentos de medidas 3 e 4.

B. Multiplique os segmentos de medidas 5 e 4.

C. Multiplique os segmentos de medidas -4 e 4.

D. Multiplique os segmentos de medidas -5 e 4.

E. Multiplique os segmentos de medidas -3 e -7.

2) Resolva o seguinte problema:

Considere 1 como a unidade de medida e o segmento $\overline{AB}$ = 13 unidades, marcados sobre o eixo x. O resultado da multiplicação deste segmento com um outro segmento $\overline{BC}$, resulta em um segmento de -39 unidades marcado sobre o eixo y. Calcule e mostre geometricamente a medida do segmento $\overline{BC}$ que deve ser marcado no eixo y, para que esta multiplicação satisfaça o resultado de -39 unidades.

3) Dados os segmentos de medidas 1 e 7 unidades, em x e y respectivamente. Pela construção de Hilbert, sabemos que existe uma reta paralela ao segmento que une (1,0) à (0,7). Tal reta intercepta o eixo x em 15 unidades. Onde será a interseção com o eixo y?

OBSERVAÇÃO: As atividades descritas anteriormente podem ser realizadas, com utilização do Software GeoGebra ou ainda com o uso de papel quadriculado.

REFERÊNCIAS

CYRINO, M. C. C. T.; PASQUINI, R. C. G.. **Multiplicação e divisão de números inteiros:** uma proposta para a formação de professores de Matemática. Organizado por Iran Abreu Mendes e Miguel Chaquiam – Londrina-PR: SBHMat, 2 ed. 2010.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

IFRAH, G. **Os números:** história de uma grande invenção. São Paulo, SP: Globo, 9 ed. 1998.

LOURENÇO, C. **Números inteiros**. Disponível em: <http://cleanlourenco.blogspot.com/2010/03/historia-dos-numeros-inteiros.html>. Acesso em: 08 nov. 2010.

ORIGEM DOS NÚMEROS NEGATIVOS. Disponível em: <http://www.somatematica.com.br/negativos.php>. Acesso em: 08 nov. 2010.

SOBRE OS AUTORES

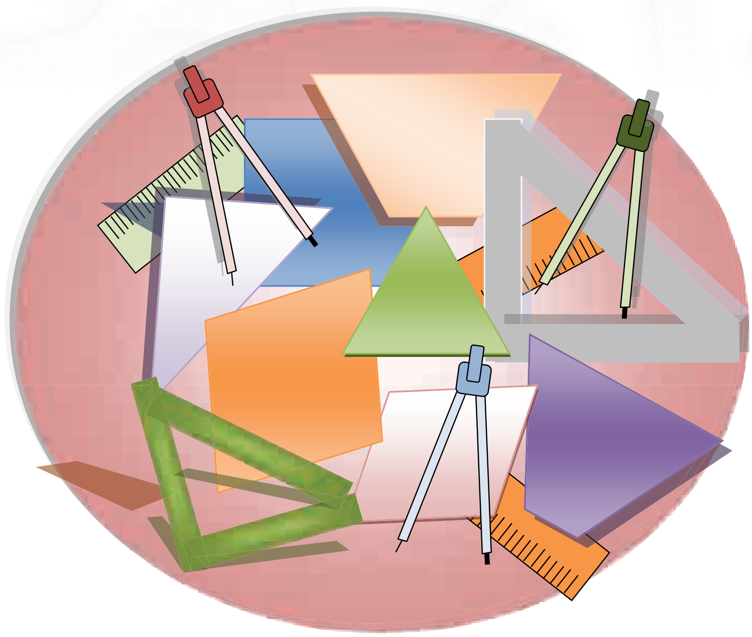
Daniel Zampieri Loureiro
Acadêmico do curso de Licenciatura em Matemática da UNIOESTE – câmpus de Cascavel.

Daniely Raquel Ghirotto
Acadêmica do curso de Licenciatura em Matemática da UNIOESTE – câmpus de Cascavel.

Diogo Leandro Piano
Licenciado em Matemática pela UNIOESTE – câmpus de Cascavel.

ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

CARLA MELLI TAMBARUSSI
FRANCIELE TAÍS DE OLIVEIRA



OBJETIVOS:

- Apresentar o conceito de área para polígonos.
- Construir e justificar as fórmulas da área dos polígonos principais, como o retângulo, triângulo, paralelogramo, losango e trapézio.
- Visualizar a área de um polígono qualquer como a soma das áreas dos polígonos principais.

INTRODUÇÃO

A necessidade de determinar a área de uma superfície é bem antiga. No antigo Egito, os donos das terras localizadas às margens do rio Nilo tinham que pagar impostos ao faraó, proporcionais à utilização de uma determinada superfície, ou seja, quanto maior a área utilizada, maior seria o imposto a ser pago. Ainda hoje, nos deparamos com situações que exigem o conhecimento de cálculo de área de uma superfície. Vejamos:

FIGURA 1 - Horta

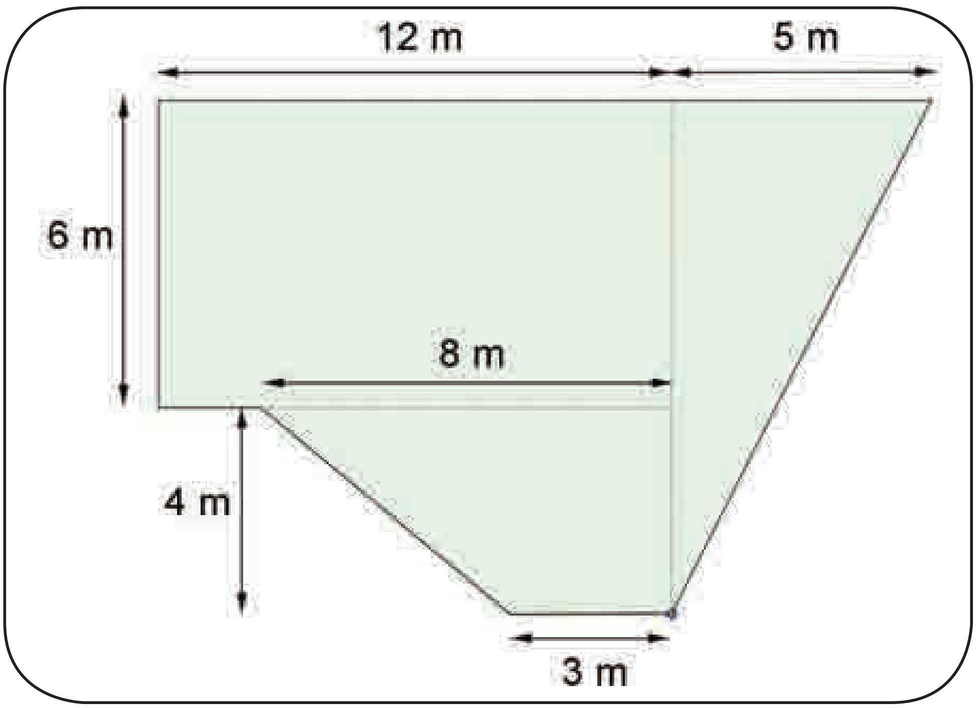
- Qual é a área plantada da horta?
- O que precisamos saber para responder a pergunta acima?

Para respondermos estes questionamentos, é necessário o conhecimento da ideia do cálculo de áreas, que será abordado posteriormente.

Partindo de uma situação problema, estudaremos nesta unidade didática, como calcular a área das principais figuras planas, por meio da decomposição de figuras.

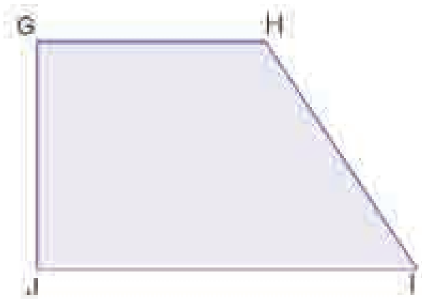
SITUAÇÃO PROBLEMA

Imagine a seguinte situação: a horta da sua escola tem o mesmo formato da figura seguinte. Como você sabe as medidas dos lados da horta, é possível obter a área de cada uma dessas partes e, consequentemente, determinar a área total da horta. Mas como proceder para determinarmos a área total dessa horta?



ALGUNS CONCEITOS

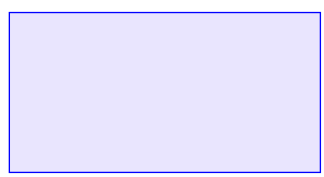
Considere o polígono GHIJ, abaixo:



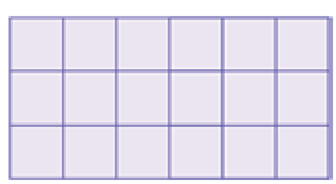
Dizemos que a **superfície** de um polígono corresponde à união do seu contorno com a região interior. A medida dessa superfície, expressa por um número real positivo, é chamada área.

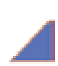
Existem várias maneiras de determinarmos a área de uma superfície. Uma delas é por meio da comparação entre superfícies.

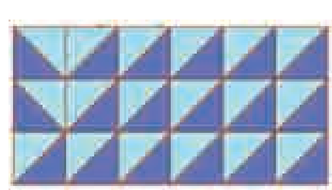
Considere a superfície do polígono retangular seguinte:



Exemplo 1: Para calcularmos a área desse polígono, tomaremos  como unidade de medida. Sendo assim, a área deste polígono é igual a 18 . Conforme pode ser observado na figura seguinte:



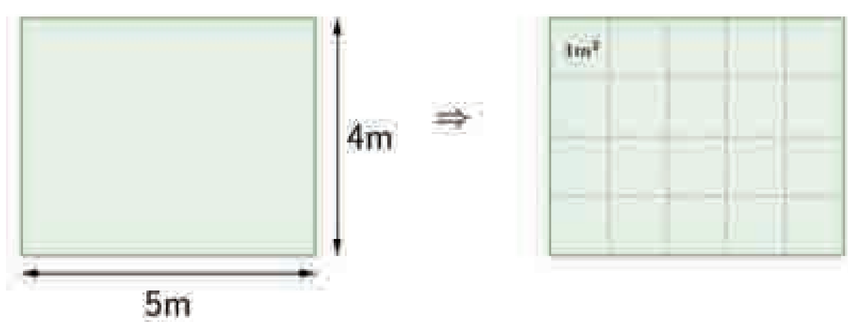
Exemplo 2: Se tomarmos  como unidade de medida, a área do polígono será igual a 36 



Imagine como seria se cada pessoa tomasse uma unidade de medida diferente para calcular, por exemplo, a área do piso de uma casa, ou a área de uma parede a ser pintada, ou a área de um terreno a ser negociado. As pessoas teriam dificuldade para efetuar uma comunicação, pois, dificilmente chegariam a um mesmo valor numérico, uma vez que cada um teria a sua própria unidade de medida. Para evitar essas dificuldades tomaremos uma unidade de medida como padrão, que será o metro quadrado (m^2), que corresponde à superfície de um quadrado com $1\,m$ de lado.

ÁREA DO RETÂNGULO

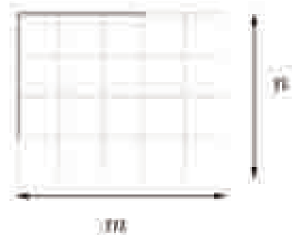
O cálculo da área do retângulo é um dos mais conhecidos pelos alunos, porém a maioria deles não compreende porque a área desta figura plana é dada pelo produto entre a base e a altura. Então, objetivando dar sentido a esta fórmula, adotamos como unidade de área um quadrado de área igual a 1 m^2, ou seja, um quadrado com lados medindo $1\,m$. A partir disso, vamos pensar em um retângulo com lados medindo 5 e 4 metros. Traçando retas paralelas aos lados, podemos dividir este retângulo em quadrados unitários. É importante ressaltarmos que, neste caso, cada reta representa a distância de $1\,m$ da outra, conforme pode ser observado na figura seguinte.



Se contarmos a quantidade de quadrados de área igual a 1 m^2 existentes no interior do retângulo, teremos 20 quadrados, portanto, 20 m^2 de área. Temos 5 quadrados, de 1 m^2 de área cada um, justapostos na horizontal num total de 4 linhas. Desta maneira podemos escrever a área total como sendo

$$\underset{1^{a}\text{linha}}{5}+\underset{2^{a}\text{linha}}{5}+\underset{3^{a}\text{linha}}{5}+\underset{4^{a}\text{linha}}{5}=5\times4$$

Assim se tomarmos um retângulo de medidas m e n, dividindo-o em quadrados de área de 1 m^2, teremos m quadrados justapostos na horizontal, distribuídos em n linhas, conforme a figura seguinte.



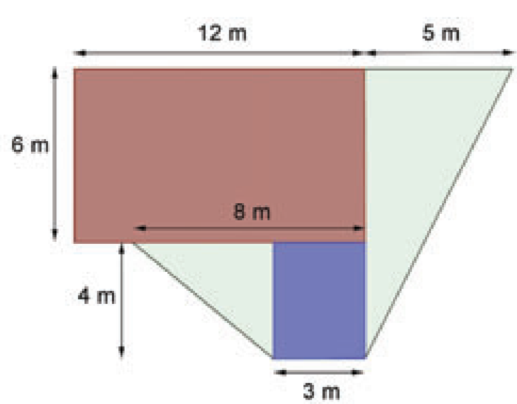
Seguindo o raciocínio anterior, podemos representar a quantidade de quadrados unitários como sendo

$$\underset{1^a linha}{m} + \underset{2^a linha}{m} + \underset{3^a linha}{m} + \underset{4^a linha}{m} + \ldots + \underset{n^a linha}{m} = m \times n$$

Como m é a medida que representa a base do retângulo e n a medida que representa a altura, podemos escrever a área do retângulo, como sendo

$$A_{retângulo} = base \times altura$$

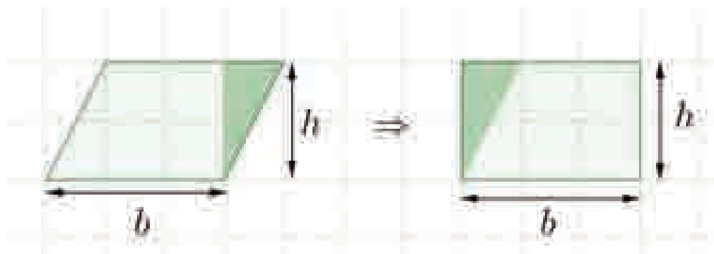
Agora que já construímos o cálculo da área do retângulo, vamos retornar à situação problema da horta e verificar se há algum retângulo na figura.



Calcule a área dos retângulos destacados na figura anterior.

ÁREA DO PARALELOGRAMO

Como nosso objetivo, é apresentar as maneiras de obter as áreas das figuras planas, independente de fórmulas, no caso do paralelogramo, podemos decompô-lo, e obter um retângulo com área igual à área do paralelogramo dado, conforme segue na figura.

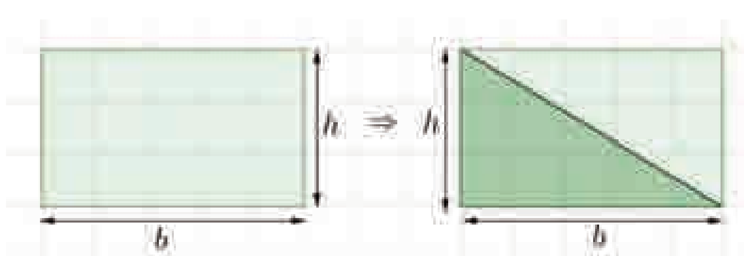


Assim, a área da região limitada por um paralelogramo é determinada pelo produto entre sua base e sua altura, ou seja

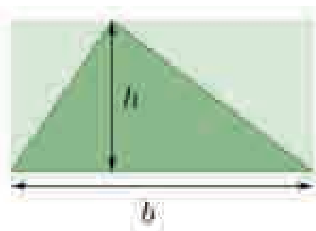
$$A_{paralelogramo} = base \times altura$$

ÁREA DO TRIÂNGULO

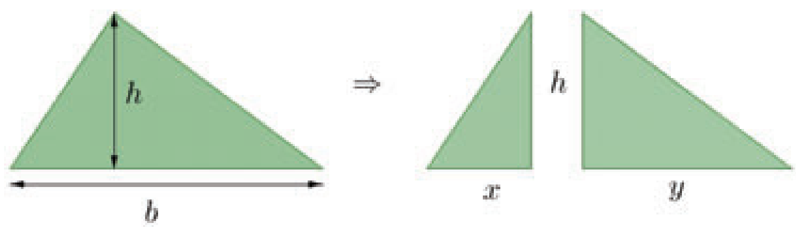
A área limitada por um triângulo pode ser calculada de diferentes maneiras, porém a mais utilizada é a que representa esta área como sendo a metade do produto entre a base e a altura. Mas porque fazemos este cálculo? Veja na figura seguinte, que ao traçarmos a diagonal de um retângulo, obtemos dois triângulos de mesma área. Assim a área do triângulo nada mais é, do que a metade da área do retângulo.



Para não ficarmos restritos ao cálculo de áreas de triângulos retângulos, considere o triângulo qualquer com base b e altura h, conforme segue.



Podemos decompor o triângulo qualquer da figura anterior, em dois triângulos retângulos, conforme segue



Como já sabemos calcular área de triângulo retângulo, temos que a área do triângulo qualquer é

$$A = \frac{x.h}{2} + \frac{y.h}{2} \Rightarrow A = \frac{(x+y).h}{2}$$

$$\Rightarrow A = \frac{b.h}{2}$$

Assim, dados b e h, representando respectivamente a base e a altura, de um triângulo qualquer, podemos escrever a área do triângulo, como sendo

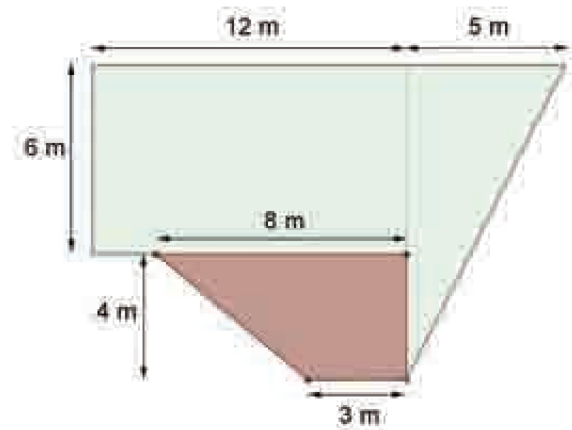
$$A_{\text{triângulo}} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$

Agora observe a figura da situação problema e responda:

- Quantos triângulos podemos obter ao decompor a figura?
- Identifique pelo menos dois triângulos e calcule a área de cada um deles.
- É possível calcularmos a área da horta somente decompondo-a em triângulos?

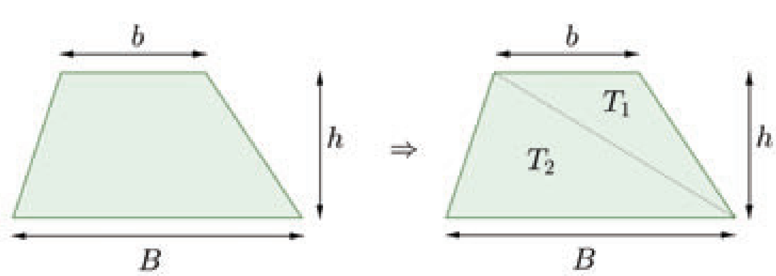
ÁREA DO TRAPÉZIO

Vamos agora trabalhar com a área do trapézio. Mas antes disso, observe a figura da situação problema:



- Como você calcularia a área destacada na figura anterior?

Como a área da região limitada por um triângulo já é conhecida, podemos decompor um trapézio em dois triângulos e, desta maneira mostrar que a área do trapézio pode ser calculada por meio da soma das áreas dos triângulos obtidos na decomposição. Para facilitar a compreensão, observe a figura a seguir:



Podemos observar na figura anterior, que dado o trapézio de base maior B, base menor b e altura h, traçando uma diagonal, obtivemos dois triângulos: T_1 com base b e altura h, e T_2 com base B e altura h. Logo, a área do trapézio pode ser obtida pela soma das áreas de T_1 e T_2.

No triângulo T_1, a área é dada por

$$A_{T_1} = \frac{b.h}{2}$$

No triângulo T_2, a área é dada por

$$A_{T_2} = \frac{B.h}{2}$$

Somando as áreas de T_1 e T_2, temos

$$A_{T_1} + A_{T_2} = \frac{b.h}{2} + \frac{B.h}{2} \quad \Rightarrow \quad A_{T_1} + A_{T_2} = \frac{b.h + B.h}{2}$$

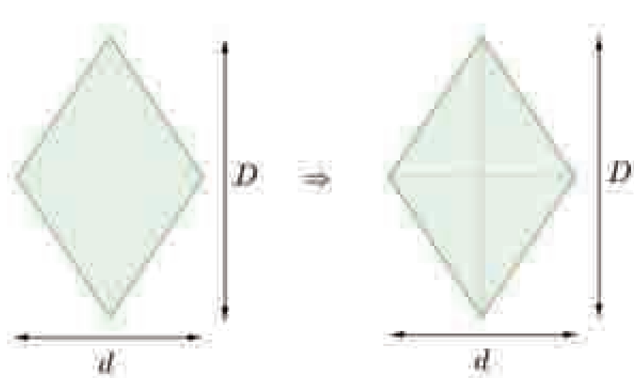
$$\Rightarrow \quad A_{T_1} + A_{T_2} = \frac{(B+b).h}{2}$$

Portando, a área do trapézio é dada por

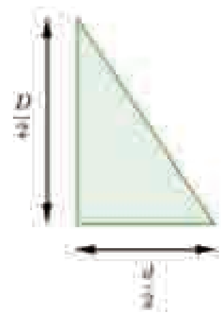
$$A_{trapézio} = \frac{(B+b).h}{2}$$

ÁREA DO LOSANGO

Ao decompor um losango qualquer, em quatro triângulos retângulos, obtemos a área do losango por meio da soma das áreas dos triângulos retângulos obtidos na decomposição.



Na figura anterior, é dado um losango de diagonal maior D e diagonal menor d. A área do losango é dada pela soma desses quatro triângulos retângulos obtidos na decomposição. Como os triângulos retângulos são congruentes, basta calcularmos a área de um triângulo e multiplicarmos por quatro. Na figura seguinte, destacamos um desses triângulos, com suas respectivas medidas para o cálculo de sua área.



Sabemos que a área deste triângulo é igual à metade do produto da base $\frac{d}{2}$ pela altura $\frac{D}{2}$. Assim a área deste triângulo é dada por

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{\frac{D}{2} \cdot \frac{d}{2}}{2} \Rightarrow A_{\text{triângulo}} = \frac{D.d}{8}$$

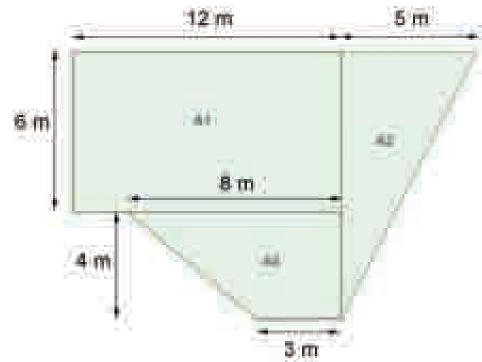
Portanto, a área do losango é dada por

$$A_{\text{losango}} = \frac{D.d}{2}$$

RETORNANDO AO PROBLEMA INICIAL...

Agora que já trabalhamos com os conceitos e a dedução das fórmulas, retornaremos ao problema inicial para calcularmos a área da figura dada, da maneira como acharmos mais conveniente. A seguir, apresentamos uma possível resolução.

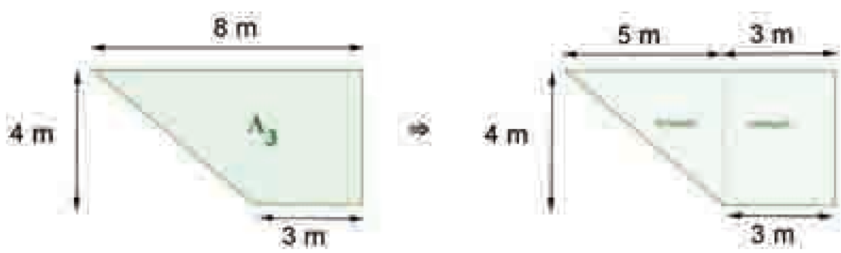
Primeiramente podemos trabalhar com as áreas separadamente, nomeando cada uma delas, conforme a figura seguinte.



Em seguida calculamos as áreas de A_1 e A_2. Logo

$$A_1 = 72m^2 \quad \text{e} \quad A_2 = 25m^2$$

Para lidar com o cálculo da área do trapézio, podemos decompor a figura A_3, em um retângulo de medidas $3m$ e $4m$, e um triângulo de base $5m$ e altura $4m$, conforme mostra a figura seguinte.



Calculamos então a área do triângulo e do retângulo, obtidos da decomposição da figura A_3, obtendo

$$A_{triângulo} = 10m^2 \quad \text{e} \quad A_{retângulo} = 12m^2$$

Assim, somando as áreas do triângulo e do retângulo temos a área de A_3, como sendo

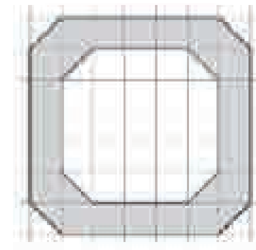
$$A_3 = 22m^2$$

Portanto, basta somarmos as áreas das figuras A_1, A_2 e A_3, e obteremos a área total, como sendo

$$A_{total} = 119m^2$$

Agora é sua vez, vamos colocar a "mão na massa" e resolver alguns problemas envolvendo o conteúdo trabalhado!

Exercício 01 *- Você quer fazer uma pipa em forma de losango e tem varetas que medem 75cm e 50cm. Quantos centímetros de papel de seda você irá usar para fazer essa pipa, levando em consideração que não é permitido quebrar as varetas?*



Exercício 02 – *O quadriculado da figura é feito com quadradinho de 1 cm de lado. Qual é a área da região sombreada?*

Exercício 03 – *Uma Bandeira do Brasil é um retângulo com 1 metro de largura e 70 centímetros de altura, que tem em seu interior um losango cujos vértices distam 8,5 centímetros dos lados do retângulo. Quanto é a área da região pintada de verde na bandeira?*

Exercício 04 – *Esta semana tivemos a informação de que nosso Colégio passará por uma reforma durante as férias de julho. O Laboratório de Química de 80 m*^{2}*, será dividido em duas salas de aula. A sala maior terá 10 m*^{2} *a mais do que a sala menor. Calcule a área que cada sala terá.*

REFERÊNCIAS

ANDRADE, J. B. de. **Composição e decomposição de figuras geométricas planas por alunos do ensino médio**. 2007. Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. PUC/ SP – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. 2007.

DANTE, L. R. **Matemática:** contexto e aplicações – Ensino Médio. São Paulo: Ática, 2002.

FACCO, S. R.. **Conceito de área:** uma proposta de ensino-aprendizagem. 2003. Dissertação de mestrado: Programa de Pós Graduação em Educação Matemática. PUC/ SP – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. 2003.

SILVEIRA, Ê.; MARQUES, C. **Matemática:** compreensão e prática - 9º ano. São Paulo: Moderna, 2008.

SOBRE AS AUTORAS

Carla Melli Tambarussi

Licenciada em Matemática pela UNIOESTE – câmpus de Cascavel. Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE / Cascavel.

Franciele Taís de Oliveira

Licenciada em Matemática pela UNIOESTE – câmpus de Cascavel. Mestranda do Programa de Pós-Graduação Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho - UNESP / Rio Claro.

POTÊNCIAS

JESUS MARCOS CAMARGO

OBJETIVOS:

- Conhecer as propriedades fundamentais das potências.

INTRODUÇÃO

Diferentes geometrias foram inseridas nas Diretrizes da Educação Básica do Estado do Paraná. Essa inserção tem preocupado os professores sobre como abordar este conteúdo. Embora o objetivo desta unidade didática seja trabalhar algumas propriedades das potências, parte-se da geometria fractal, visando familiarizar os alunos com esta geometria.

O TRIÂNGULO DE SIERPINSKI

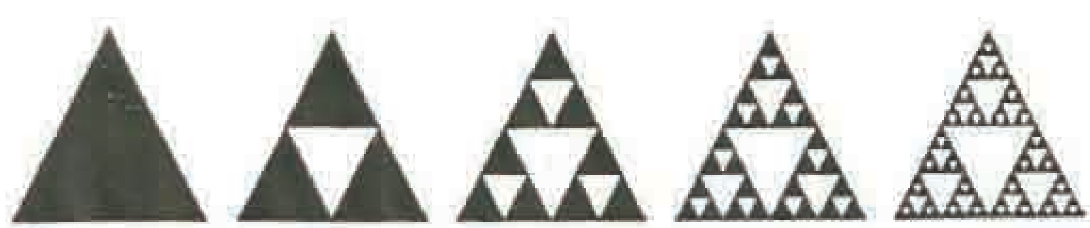
O processo de construção de um fractal é feito por meio de repetições de um mesmo processo. Essas repetições, chamadas iterações, geram uma imagem fractal.

O fractal que será trabalhado nesta unidade é chamado de triângulo de Sierpinski (ou "gasket") e sua construção é realizada da seguinte maneira:

Partindo de um triângulo qualquer[1] determine e conecte os pontos médios nos lados desse triângulo de forma que o resultado seja quatro novos triângulos, desconsidera-se então o triângulo central, ou seja, três novos triângulos devem ser formados. Este será o processo iterativo para a construção do fractal, ou seja, a cada iteração tomaremos os pontos médios dos lados de cada um dos novos triângulos e os ligaremos de modo a formar novos triângulos semelhantes em escala menor.

Observe abaixo a formação do triângulo de Sierpinski com quatro iterações.

FIGURA 1 - Iterações no triângulo de Sierpinski[2]



Cada triângulo representa um estágio. Neste exemplo o último fractal foi iterado quatro vezes.

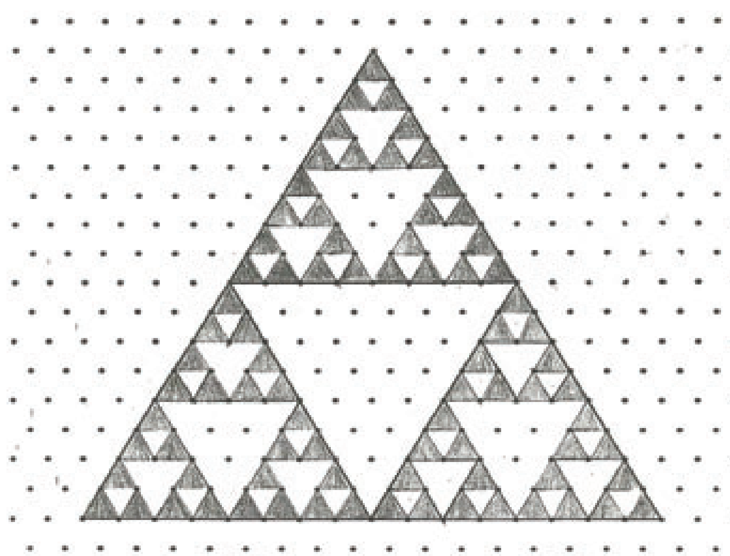
1 Nesta unidade utilizaremos um triângulo equilátero.
2 Disponível em: http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Sierpinsky_triangle_(evolution).png

FRACTAL, FAÇA VOCÊ MESMO!!!

Vamos agora construir o triângulo de Sierpinski e estudar algumas de suas propriedades. Para isto será necessária uma folha pontilhada de modo a facilitar a construção (devem ser realizadas quatro iterações).

O pontilhado deve ser feito de modo que todos os pontos tenham sido utilizados. Ao final da construção você obterá 81 pequenos triângulos. Sombreie os triângulos e obterá o triângulo de Sierpinski. Cada triângulo deve ter o comprimento do lado igual à metade do triângulo do estágio anterior.

FIGURA 2 - Construção em pontilhado[3]



O que acontece em cada estágio? Imagine esse processo sendo repetido indefinidamente, de que tamanho se aproximarão as áreas dos triângulos após infinitos estágios?

PADRÃO DE VARIAÇÃO DO TRIÂNGULO DE SIERPINSKI

Quatro estágios de construção do triângulo de Sierpinski são mostrados abaixo. Para cada estágio subsequente, o processo de subdivisão leva a triângulos cada vez menores. Use essas figuras para explorar o padrão de variação do triângulo após sucessivos estágios (iterações).

3 Também pode ser utilizada uma malha triangular.

NÚMERO DE TRIÂNGULOS

1. Conte o número de triângulos sombreados dos estágios 0, 1, 2, 3 e 4.

Estágio	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**...**	**n**
Número de triângulos								

2. Faça a previsão do número de triângulos do estágio 5. Qual constante deve ser multiplicada para se ir de um estágio para o outro?

3. Generalize uma expressão para encontrar o número de triângulos no estágio n. Quando o valor de n torna-se muito grande, o que acontece com o número de triângulos?

ÁREA DE TRIÂNGULOS

1. Assuma no estágio 0 uma área igual a 1 u. a. Encontre o total de áreas sombreadas do estágio 1 até o 4.

Estágio	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**...**	**n**
Área dos triângulos								

2. Faça a previsão da área total no estágio 5. Qual constante deve ser multiplicada para se ir de um estágio para outro?

3. Generalize uma expressão para a área total no estágio n. Quando o valor de n for muito grande, o que acontece com a área sombreada?

As potências são de fundamental importância no desenvolvimento de vários estudos, das mais diversas áreas. Vejamos agora dois exemplos de outras situações que envolvem o conceito de potência.

EXEMPLO 1

Em uma determinada pesquisa científica a respeito de um protozoário, constatou-se que a cada hora este se reproduz por cissiparidade, dobrando o número de indivíduos existentes anteriormente. Sabendo que no início havia um único protozoário, teremos:

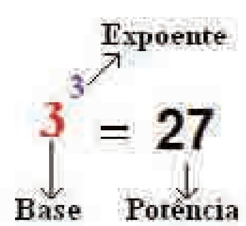
Tempo(h)	Número de protozoários
1	1.2=2
2	2.2=4
3	4.2 = 2.2.2 = 8
4	8.2 = 2.2.2.2 = 16
...	

E assim por diante.

Portanto, na 5ª hora, o número de protozoários será igual a:

2.2.2.2.2=32, ou seja, 2^5=32

Lembrando que representamos uma potência da seguinte forma:



Vejamos agora outro exemplo que envolve o cálculo de potências, muito usado na área comercial.

EXEMPLO 2

Para comprar uma geladeira nova Maria pediu ao banco um empréstimo de R$ 500,00. O banco cobrará uma taxa de juros de 2% ao mês e Maria pagará sua dívida em 10 meses. Sabendo que o banco cobra juros sobre o montante emprestado e sobre o juro do mês anterior, determine quanto Maria pagará ao final dos 10 meses.

RESOLUÇÃO:

A situação acima envolve juros compostos, por isso ocorre acumulação de capital (dívida) que deverá ser expresso por uma potenciação, em que o número de meses corresponderá ao expoente e a base será representada pela taxa. Observe a fórmula do cálculo do montante nos juros compostos:

$\mathbf{M = C.(1 + i)^t}$ (base: (1 + i), expoente: t)

$M = 500.(1 + 0{,}02)^{10}$

$M = 500 \;.\; 1{,}02^{10}$

$M = 500 \;.\; 1{,}2189944199947571 3024$

$M = 609{,}50$

PROPRIEDADES DAS POTÊNCIAS

1) Multiplicação de Potências

Veja que

$$2^3.2^2=(2.2.2).(2.2)=8.4=32=2^5$$

E também que

$$3^5.3^3=(3.3.3.3.3).(3.3.3)=243.27=6561=3^8$$

Qual o resultado para

$$5^7.5^1=$$

O que podemos concluir com isso? Qual regra podemos determinar para $a^m.a^n$?

2) Divisão de Potências

Veja que

$$\frac{3^7}{3^4}=\frac{(3.3.3.3.3.3.3)}{(3.3.3.3)}=3^3$$

E que

$$\frac{7^5}{7^3} = \frac{(7.7.7.7.7)}{(7.7.7)} = 7^2$$

Estabeleça, com base nos exemplos anteriores, uma regra para $\frac{a^m}{a^n}$.

Veja agora outras propriedades das potências.

3) Potência de potências

Como calcular então $(3^5)^2$?. Veja que podemos calcular da seguinte maneira

$$(3^5)^2 = 3^5.3^5$$

Mas já conhecemos uma regra que permite calcular a multiplicação de potências, então

$$(3^5)^2 = 3^5.3^5 = 3^{5+5} = 3^{10}$$

Veja outro exemplo

$$(7^9)^6 = 7^9.7^9.7^9.7^9.7^9.7^9 = 7^{9+9+9+9+9+9} = 7^{54}$$

Observando os exemplos anteriores, tente estabelecer uma regra geral para $(a^m)^n$.

Conseguimos estabelecer algumas propriedades de potência até aqui utilizando a multiplicação das bases, agora para prosseguirmos vamos estudar a tabela seguinte:

2^1	2
2^2	4
2^3	8
2^4	16
2^5	32
2^6	64

Note que cada vez que aumentamos uma unidade na potência estamos multiplicando por 2 mais uma vez, então vamos pensar que para retirar uma unidade da potência, temos que utilizar a operação inversa, no caso dividir por 2, assim vamos estender a tabela:

2^{-2}	
2^{-1}	
2^{0}	
2^{1}	2
2^{2}	4
2^{3}	8
2^{4}	16
2^{5}	32
2^{6}	64

Pensando que para retroceder uma unidade de potência devemos dividir o resultado pela base, tente preencher a tabela anterior.

Dessa tabela surgem duas propriedades importantes:

$$1^{a}) \ a^{0} = 1;$$

$$2^{a}) \ a^{-m} = \frac{1}{a^{m}}$$

Agora que estudamos as principais propriedades de potências vamos resolver alguns exercícios!

ATIVIDADES PROPOSTAS

1) Com base nas propriedades estudadas até o momento resolva:

a) $4^{2} \,.\, 4^{3} =$

b) $10^{4} : 10^{2} =$

c) $(6^{3})^{2} =$

d)$2^{-2} =$

e) $3^{2} \,.\, 3^{3} : 3^{4} =$

f) $2^{-2} : 2^{6} =$

h) $1000^{0} =$

i) $((7^{2})^{3})^{4} =$

REFERÊNCIAS

DANTE, L. R. **Matemática:** vol. único. São Paulo: Ática, 2005.

IEZZI, G. et al. **Fundamentos de Matemática elementar**. São Paulo: Atual, 2005. Vários volumes.

PARANÁ, SEED. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica Matemática**. Curitiba, 2008. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/diaadia/diadia/arquivos/File/diretrizes_2009/matematica.pdf>. Acesso em: 03 abr. 2012.

SOBRE O AUTOR

Jesus Marcos Camargo

Licenciado em Matemática pela UNIOESTE – câmpus de Cascavel. Mestrando do Programa de Pós-Graduação em Matemática – PMA pela Universidade Estadual de Maringá – UEM / Maringá.

UTILIZANDO FRAÇÕES

YIN LUNG CHEN

OBJETIVO

- Conceituar números fracionários.

INTRODUÇÃO

Os números são uma ferramenta para representar quantidades e resolver problemas encontrados no cotidiano. A necessidade de registrar quantidades se iniciou com o desenvolvimento das atividades humanas, quando o homem começou a plantar, produzir alimentos, construir casas, proteções, dentre outras coisas. Acredita-se que a utilização dos números, nos dias de hoje, seja principalmente no comércio e na Ciência.

Atualmente, os números podem ser divididos em alguns grupos, denominados conjuntos. Os números fracionários são da família dos Racionais. Racionais (Q) é o conjunto de todos os números que podem ser expressos na forma de uma fração, na qual o numerador é um número pertencente ao conjunto dos números inteiros (z) e o denominador é um número inteiro também, mas diferente de zero.

As frações podem ser utilizadas para representar inteiros (o todo) e suas partes. A figura a seguir exemplifica uma situação de todo e partes.

Na figura acima temos pedaços que juntos formam bolos, estão faltando algumas partes. Como é possível representar a parte que falta do bolo coberto com doce de leite? Ou como posso representar a parte do bolo coberto com chocolate granulado que sobrou?

As frações também podem ser interpretadas como razão, divisão e porcentagem. Esta unidade didática estuda os números fracionários a partir da ideia de divisão.

SITUAÇÃO PROBLEMA 1

Na figura a seguir, temos representadas duas barras de chocolates de tamanhos iguais. Estas devem ser divididas entre dois grupos: um de meninos, com 2 integrantes; e outro de meninas, com 3 integrantes. A cada grupo é atribuída uma barra de chocolate para ser dividida entre os seus integrantes. Como esta divisão pode ser efetuada?

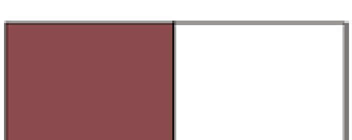
Existem muitas maneiras de repartir o chocolate, mas vamos fazer uma repartição de forma que todas as pessoas de um grupo tenham pedaços ou partes iguais.

Observe que ninguém terá o chocolate inteiro depois da divisão, pois cada grupo possui mais do que um integrante.

Sendo assim, como os chocolates podem ser divididos?

1. Para os meninos, ao se dividir o chocolate ao meio, cada integrante obtém o mesmo tamanho de chocolate. Após a divisão, cada menino tem "uma metade" do chocolate.

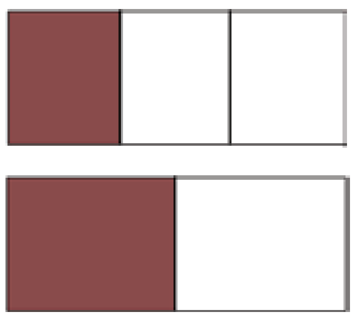
AGORA COMO SE PODE ESCREVER SOBRE ESSA "METADE" COM NÚMEROS?



Quando se tem duas metades do chocolate, tem-se então uma barra de chocolate inteira.

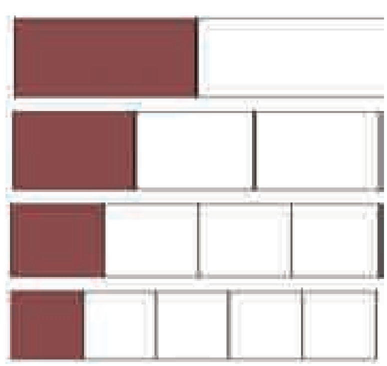
2. Como tem mais meninas do que meninos, o chocolate terá que ser dividido em mais partes para elas. Assim, serão três partes. Cada pedaço, resultante da divisão, será denominado de "um terço". Então, cada menina tem um terço do chocolate.

COMO SE PODE ESCREVER SOBRE ESSE "TERÇO" COM NÚMEROS?



Os tamanhos das divisões nos dois grupos são diferentes, o pedaço do grupo das meninas é menor em relação ao pedaço dos meninos.

Dependendo da divisão de partes do chocolate, tem-se um nome diferente, para facilitar a identificação do parte/todo, se a divisão for em:



Duas partes: cada parte é **um meio** (1/2);

Três partes: cada parte é **um terço** (1/3);

Quatro partes: cada parte é **um quarto** (1/4);

Cinco partes: cada parte é **um quinto** (1/5)...

Segue uma tabela com os nomes de cada parte.

Número de Partes	Nome de cada parte
2	Meio
3	Terço
4	Quarto
5	Quinto
6	Sexto
7	Sétimo
8	Oitavo

Número de partes	Nome de cada parte
9	Nono
10	Décimo
11	Onze avos
12	Doze avos
13	Treze avos
100	Centésimo
1000	Milésimo

Pode-se observar que acima de 10 o termo "avos" é utilizado seguido do número da divisão, o qual consta no denominador da fração. Este termo é um sufixo do latim que significa fração ou parcela. Na palavra centavo, ao decompô-la, ficaria *centut*+avo, ou seja, um centésimo.

SITUAÇÃO PROBLEMA 2

Marcos, Eduardo, Caio e Jefferson pediram três pizzas grandes para serem divididas entre eles. Como eles podem efetuar a divisão para que todos tenham as mesmas quantidades de pizza?

A primeira questão a ser analisada é se cada um quiser ficar com uma pizza inteira. É possível que todos recebam uma pizza inteira? Como são quatro pessoas, e só temos três pizzas, então não é possível que isso ocorra. Sendo assim, como efetuar essa divisão?

❖ Uma das opções é dividir as pizzas ao meio, tendo assim seis pedaços, que podem ser distribuídos igualmente para quatro pessoas e sobrarão dois pedaços ainda. Ao dividir novamente os dois pedaços ao meio, serão mais quatro pedaços, e assim, será possível distribuí-los igualmente para cada um. Nesta opção, cada um recebe UM MEIO (1/2) mais UM QUARTO (1/4) de pizza.

❖ A outra opção é dividir as três pizzas em quatro partes e distribuir para quatro pessoas. Dessa maneira, cada pessoa receberá um quarto, um quarto e um quarto de cada pizza, ou seja, três quartos de uma pizza. Contando os pedaços: um quarto mais um quarto e mais um quarto, resulta em um total de TRÊS QUARTOS (3/4).

A divisão de uma pizza em pedaços iguais pode ser realizada de diversas formas. Observe a seguir as notações da parte/todo:

Três partes: um terço $\frac{1}{3}$, dois terços $\frac{2}{3}$, três terços $\frac{3}{3}$,...;

Quatro partes: um quarto $\frac{1}{4}$, dois quartos $\frac{2}{4}$, três quartos $\frac{3}{4}$,...;

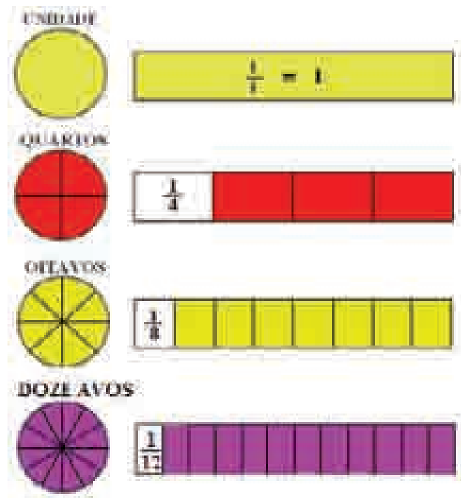
Cinco partes: um quinto $\frac{1}{5}$, dois quintos $\frac{2}{5}$, três quintos $\frac{3}{5}$,...

Isto vale para todas as divisões que foram apresentadas: sexto, sétimo, oitavo, nono, décimo, onze avos, doze avos, treze avos, centésimo, milésimo. Vale também para todas as outras divisões.

SITUAÇÃO PROBLEMA 3

Um bolo de chocolate foi dividido em 12 pedaços iguais, Carlos comeu 1/4 do bolo; João pegou 2/8 do bolo; Maria levou 3/12 do bolo; Lena veio por último para pegar o que sobrou para comer, a questão é: sobrou bolo para Lena? O que podemos dizer sobre os pedaços que os três pegaram?

Se o bolo for dividido em 12 partes, como retiraremos um quarto (1/4) do bolo? Vejamos na figura a seguir.



A divisão do bolo que os meninos pegaram (1/4, 2/8) é diferente da repartição original. Mas quando repartirmos o bolo em 12 partes, três partes da repartição (3/12) que Maria levou são equivalentes a 1/4 do bolo.

$$\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

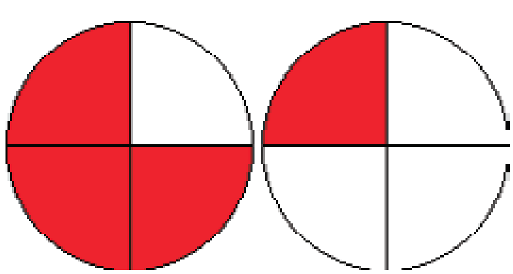
Como também, se dividirmos o bolo em 8 partes, 2/8 dessa divisão são equivalentes ao 1/4 do bolo, sendo assim o João pegou também 1/4 do bolo.

$$\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Logo, Carlos, João e Maria tomaram a mesma quantidade do bolo, que foi ¼. Assim, um quarto mais um quarto e mais um quarto resulta em três quartos.

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Ainda sobra um quarto do bolo. Esta é a quantidade de bolo que Lena poderá levar.



Ao somar 3/4 + 1/4 resulta 4/4, que equivale a 1. Estabelecer aqui a relação de 4/4 com 1 unidade inteira.

SITUAÇÃO PROBLEMA 4

Um pacote de wafer foi dividido por Aline, Jacqueline, Paulo e Gabriela. Quantos pedaços de wafer cada um conseguiu, sabendo que o pacote contém 24 pedaços?

Se dividirmos o pacote para quatro pessoas cada uma terá $\frac{1}{4}$ do pacote. Como se tem 24 pedaços de wafer no pacote, então para dividir o pacote entre as quatro pessoas terá que dividir os 24 biscoitos. Neste caso $\frac{1}{4}$ do pacote equivale a $\frac{1}{4}$ dos 24 biscoitos, agora o que seria $\frac{1}{4}$ de 24? Para entender esta ideia precisa-se voltar à ideia do que seja $\frac{1}{4}$, que é dividir em quatro partes o todo e pegar uma destas partes. Sendo assim se dividirmos 24 biscoitos em quatro partes, cada parte (agrupamento de biscoitos) teria 6 biscoitos. Logo $\frac{1}{4}$ de 24 seriam 6 wafers.

Estabelecer a ideia de que 2/4 de 24 seriam duas partes (agrupamento de biscoitos) do total de 24 pedaços. Uma parte tem seis, duas partes tem 6+6 que seriam 12 biscoitos; analogamente para 3/4 e 4/4.

Outro exemplo de fracionamento de conjuntos discretos, como o apresentado acima, é a história narrada por Malba Tahan (1983) em "O Homem que Calculava" sobre a divisão de heranças de 35 camelos por três irmãos. Segundo a vontade do pai, o primogênito receberia metade da herança, o segundo receberia um terço e o caçula receberia um nono. Os três irmãos ficaram confusos, pois repartir 35 camelos por dois, três e nove não implicava numa divisão exata da quantidade de camelos.

Beremiz Samir, o matemático, foi chamado para resolver o problema, pois as divisões resultavam respectivamente em: dezessete camelos inteiros mais meio camelo, onze camelos e dois terços de camelo e três camelos e oito nonos de um camelo.

O matemático percebeu que a adição das partes da herança metade para o filho mais velho, um terço para o segundo filho e um nono para a caçula somavam 17/18 avos.

A fração 17/18 equivale a 34/36. Ora, 35 não é divisível por 18, mas 36 é. Ao constatar esse fato, Beremiz empresta um camelo de seu amigo e o acrescenta à herança.

Dessa maneira, 36 camelos podem ser divididos por 2, resultando 18 camelos. Ao dividir por 3 resultam em 12 camelos e ao dividir por 9 resultam 4 camelos. Os três irmãos saem ganhando com a divisão da herança e Beremiz ficou com os dois camelos restantes, devolvendo o camelo do amigo e lucrando outro.

Para finalizar, entendemos que um professor deve explorar as diferentes ideias existentes no ensino de frações. Para tanto seguem alguns exercícios para serem aplicados.

EXERCÍCIOS

1) Se um menino tem 1/2 de uma barra de chocolate e resolve dar metade do seu pedaço para sua mãe, quanto chocolate a mãe dele tem?

2) Um fazendeiro repartiu as terras que tinha entre seus 3 filhos da seguinte maneira: o mais velho recebeu $\frac{4}{7}$ das terras e o segundo filho metade da quantidade que o mais velho recebeu. Quanto recebeu o filho mais novo? E quem recebeu a maior quantidade de terras?

3) Numa competição gastronômica, o prato a ser servido eram empadinhas. No total haviam 30 empadinhas, João comeu 20 das empadinhas, Pedro $\frac{1}{10}$ das empadinhas e ainda sobraram algumas. Quantas Pedro comeu?

4) Numa competição de leitura Paulo leu 75 páginas de um livro de 100 páginas. Isabel leu 2/4 das páginas do mesmo livro, no mesmo período. Quem foi o vencedor?

5) Um homem faz um percurso em 5 horas, andando sempre com a mesma velocidade. Que fração do percurso fará em 1 hora?

DESAFIO:

Como se pode beber $\frac{3}{4}$ de água num copo cilíndrico cheio, tendo como ajuda outro copo do mesmo formato e com o mesmo volume? Como representar isso matematicamente?

REFERÊNCIAS

FRAÇÕES: Jogos e exercícios. Disponível em: <http://escolovar.org/mat_fraccao_jogos.tot.htm>. Acesso em: 01 mar. 2011.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. **Matemática e realidade:** 6º ano, 6ª ed., São Paulo: Atual, 2009.

TAHAN, M. **O homem que calculava**. São Paulo: Círculo do Livro, 1983.

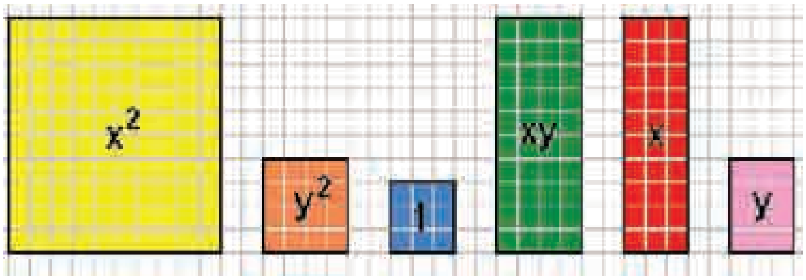
SOBRE O AUTOR

Yin Lung Chen

Licenciado em Matemática pela UNIOESTE – câmpus de Cascavel.

FATORAÇÃO DO TRINÔMIO DE SEGUNDO GRAU

VIVIANY FATIMA DOS SANTOS
ELIZANGELA MENDES PEREIRA



OBJETIVOS:

- Compreender os conceitos de fatoração, bem como relacioná-los com a área do retângulo por meio do software e/ou material manipulável.

INTRODUÇÃO

Sabe-se que a matemática que estudamos hoje sofreu e ainda sofre muitas transformações e que o homem sempre tenta melhorá-la para que ela se torne acessível a todos. Em educação matemática objetiva-se um ensino em matemática que proporcione um aprendizado com maior significado aos alunos.

As Diretrizes Curriculares da Educação Básica afirmam que

> Há menções na história da Matemática de que os babilônios, por volta de 2000 a.C., acumulavam registros do que hoje pode ser classificado como álgebra elementar. Foram os primeiros registros da humanidade a respeito de idéias que se originaram das configurações físicas e geométricas, da comparação das formas, tamanhos e quantidades. Para Ribnikov (1987), esse período demarcou o nascimento da matemática. (PARANÁ, 2008, p. 38).

Dessa forma, babilônios desde a Antiguidade já se utilizavam de métodos de resolver equações do segundo grau. Um deles era pela soma e produto das raízes. A regra para achar duas raízes cuja soma e cujo produto são conhecidos era assim enunciada pelos babilônios: *Eleve ao quadrado a metade da soma, subtraia o produto e extraia a raiz quadrada da diferença. Some ao resultado a metade da soma. Isso dará o maior dos números procurados. Subtraia-o da soma para obter o outro número.*

Este método não traria significado para os alunos se expuséssemos este enunciado como se fosse uma fórmula pronta para se resolver o problema. Nos dias atuais há muitos recursos que tornam mais clara a fatoração por meio da soma e do produto das raízes. Dois recursos são apresentados nesta unidade didática para abordar a fatoração do trinômio do segundo grau objetivando o aprendizado dos alunos de forma significativa. São eles: o computador e um material manipulável.

APLICANDO O MÉTODO DOS BABILÔNIOS

Os povos antigos se utilizavam muito de fórmulas que serviam como receitas prontas, mas também se utilizavam da geometria para resolução das equações do segundo grau, ou até mesmo para demonstrações destas. “[...] é necessário que demonstremos geometricamente a verdade dos mesmos problemas que explicamos com números." (BOYER, 1994, p. 168).

A atividade foi proposta para exercitar a forma de encontrar as raízes de uma equação pela soma e o produto das raízes. Não existiam fórmulas numéricas como as conhecemos hoje, mas havia um algoritmo descrito em forma textual.

Eleve ao quadrado a metade da soma, subtraia o produto e extraia a raiz quadrada da diferença. Some ao resultado a metade da soma. Isso dará o maior dos números procurados. Subtraia-o da soma para obter o outro número.

Use este enunciado para resolver a seguinte atividade - Encontre as raízes da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$, sendo a soma das raízes igual a 5 e o produto igual a 6.

O TRABALHO COM O ALGEPLAN®

O material manipulativo utilizado nesta unidade didática para a resolução geométrica do trinômio do segundo grau é o Algeplan®. O Algeplan® é um jogo formado por quarenta peças, distribuídas em seis grupos de tamanhos e cores diferentes. As medidas utilizadas para as peças são tomadas como sendo x, y e 1. Essas peças são distribuídas da seguinte maneira:

Quadrados:

- 4 maiores de lados x, com área x^2 e perímetro 4x;

- 4 médios de lados y, com área y^2 e perímetro 4y;

- 12 pequenos de lados e área 1, e perímetro 4;

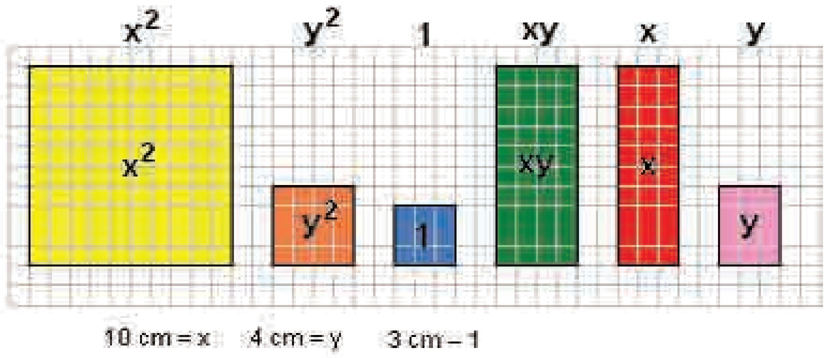
Retângulos:

- 4 de lados x e y, com área x.y e perímetro 2(x+y);

- 8 de lados x e 1, com área x e perímetro 2(x+1);

- 8 de lados y e 1, com área y e perímetro 2(y+1).

FIGURA 1 - Algeplan



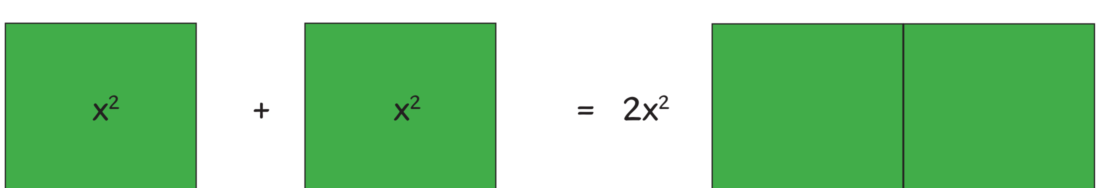
Esse material pode ser adquirido em lojas especializadas, em madeira, ou pode ser confeccionado em cartolinas, papel cartão ou EVA.

O Algeplan® tem com objetivo principal relacionar as figuras geométricas (quadrados e retângulos) com expressões algébricas, funcionando como um material de apoio no ensino de fatoração de trinômios de segundo grau.

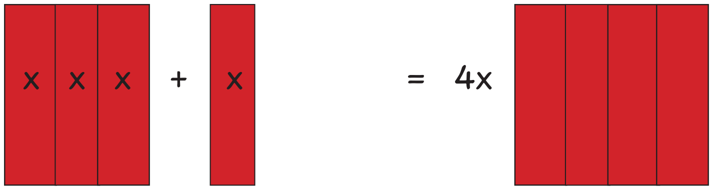
Em seguida são propostos alguns exercícios que viabilizam a utilização do material manipulativo.

RECONHECIMENTO DAS PEÇAS:

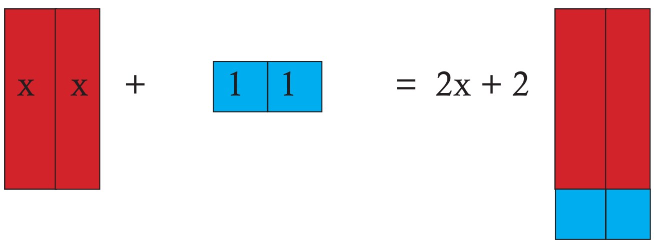
a) $x^2 + x^2 =$



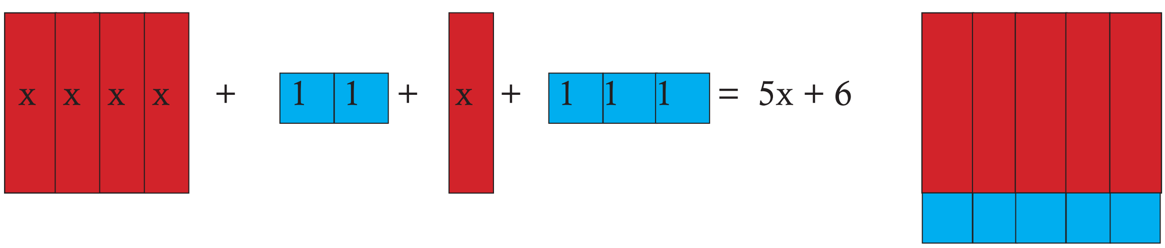
b) $3x + x =$



c) $2x + 2 =$

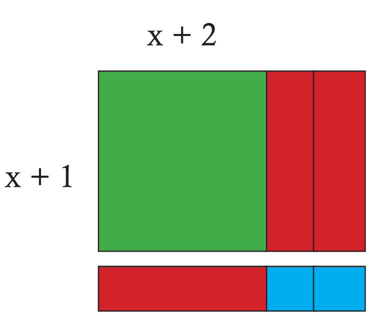


d) $4x + 2 + x + 3 =$



Exemplo de fatoração do trinômio do segundo grau com o material manipulativo:

1- $x^2 + 3x + 2$



Fatorando os termos temos: $(x + 2). (x + 1)$.

Portanto, $x^2 + 3x + 2= (x + 2). (x + 1)$.

ATIVIDADES COM O MATERIAL MANIPULÁVEL (ALGEPLAN®)

1) Encontre as seguintes expressões usando o material manipulável:

a) $(x+3)(x+2)=$ ....

b) $(x+1)(x+4)=$ ....

2) Fatore as expressões abaixo, usando o material manipulável:

a) $x^2 + 3x + 2 =$ ....

b) $x^2 + 8x + 12 =$ ....

c) $x^2 + 7x + 12 =$ ....

d) $x^2 + 6x + 5 =$ ....

3) Qual o número, cujo quadrado, somado com o seu quádruplo é igual a -3?

LEMBRE-SE ...

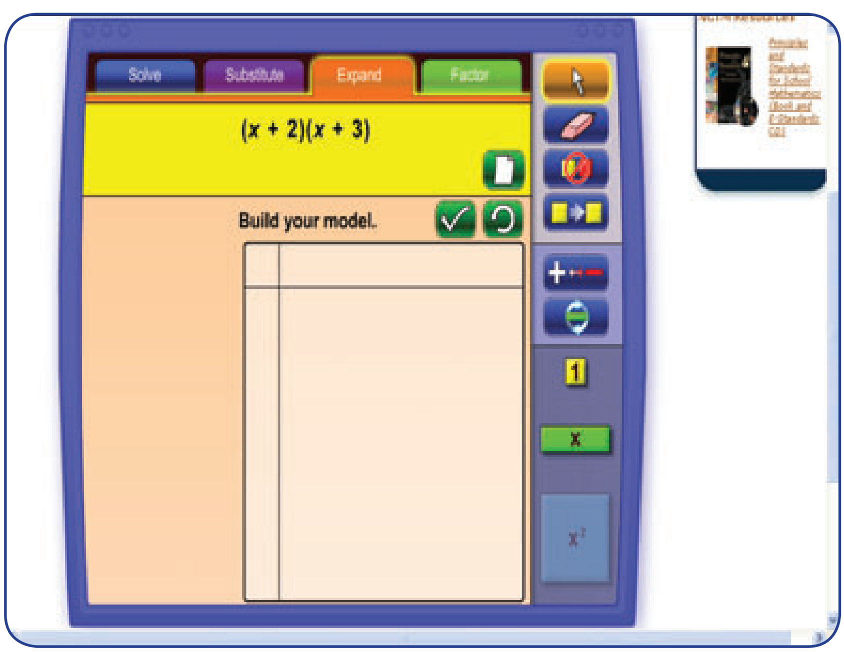
Para obter a fatoração, de acordo com o método acima (construção de um retângulo), deve-se observar primeiro quais os possíveis retângulos que podem ser obtidos com as unidades.

O TRABALHO COM O APLICATIVO *ALGEBRA TILES*

Além do trabalho com o material manipulativo, apresentamos uma proposta de trabalho com o uso do software *Algebra Tiles*. O software é um aplicativo do site *illuminations* que manipula figuras algébricas (quadrados, retângulos), que representam variáveis e constantes ajudando a resolver equações, substituir em expressões, expandir e fatorar polinômios. É um software livre e está disponibilizado no site www.illuminations.nctm.org.

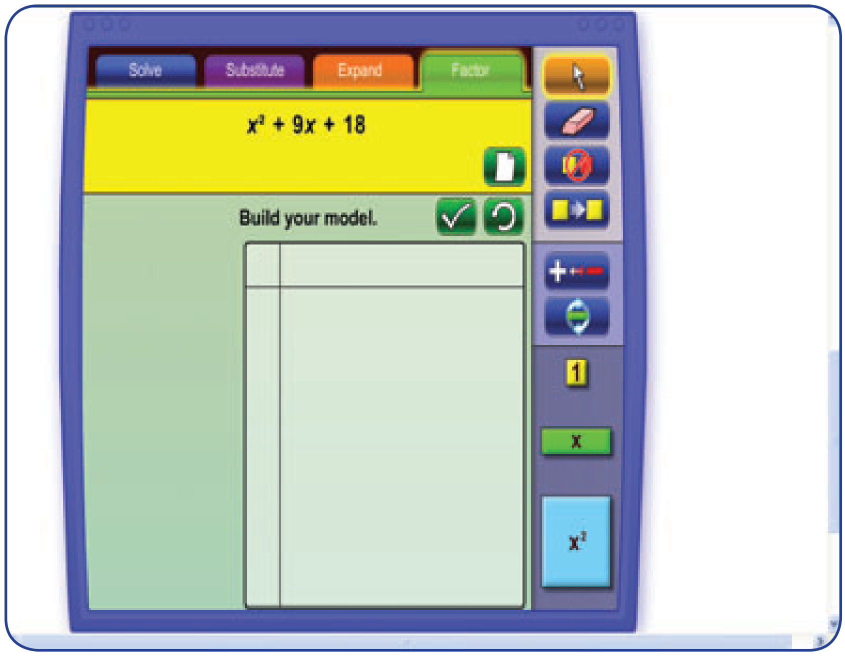
Como o objetivo é trabalhar fatoração e expansão das expressões algébricas as atividades propostas só utilizam os ícones de *expand* e *factor*. Em *Expand* e *Factor*, a grande área é o produto das áreas superior e esquerda, como em uma tabela usual de multiplicação. Assim como na figura abaixo:

FIGURA 2 – impressão da página inicial do endereço que contem a primeira atividade



FONTE: http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=216

FIGURA 3 – impressão da página inicial do endereço que contem a segunda atividade



FONTE: http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=216

Para a realização da atividade com o software é proposto um roteiro a seguir.

TRABALHANDO COM O SOFTWARE *ALGEBRA TILES*

ATIVIDADE 1

a) Entre no *Google* e digite *illuminations.nctm.org* e clique no primeiro *link*. Vá em *ACTIVITIES* e depois em *advanced options* digite *ALGEBRA TILES*. Em seguida clique em *SEARCH*.

b) Abra o conteúdo *ALGEBRA TILES*. Vá em *EXPAND*. Aparecerá uma tabela que está divida em dois retângulos (um na horizontal e outro na vertical), e dois quadrados um menor e outro maior. O menor indica a operação de multiplicação que será feita entre as peças colocadas nos retângulos. O quadrado maior é para que você coloque o seu resultado obtido com a montagem das peças.

c) Com a expressão fatorada na tela preencha os retângulos com as peças (quadrados, retângulos) que estão do lado direito da tabela. Em seguida clique no quadrado verde, que está logo acima da tabela, há nele um "V". O objetivo é verificar se as peças e sua colocação estão corretas. Após, coloque no quadrado maior da tabela o resultado da multiplicação das peças. Observe a resposta obtida a partir das peças e a escreva no espaço em branco logo abaixo da expressão fatorada, ela corresponde à expressão encontrada de forma algébrica. Clique novamente no ícone "V" e verifique se sua resposta está correta; caso ela não esteja, surgirá um fundo alaranjado, indicando o erro.

d) A cada expressão certa, clique no quadrado onde aparece uma folha em branco e outra expressão aparecerá para ser expandida.

ATIVIDADE 2

- Agora clique na aba *FACTOR* à direita da *Expand* que você acabou de utilizar. Aqui você aprenderá a fatorar a expressão algébrica. Procure expressões do segundo grau, caso apareça alguma do terceiro ou primeiro graus descarte-as clicando no quadrado verde no qual aparece uma folha em branco.
- O procedimento da tabela acontecerá de maneira idêntica ao da atividade anterior. A diferença é que agora você começará colocando as peças, que correspondem a expressão apresentada, no quadrado maior.
- Após colocadas as peças, verifique se elas estão corretas. Em seguida, preencha o retângulo vertical e horizontal da tabela com as peças que corresponderão com a fatoração da expressão. Verifique novamente a correção de sua resposta e, então, escreva de forma algébrica e fatorada a expressão apresentada.

ATIVIDADE 3

Procure na função *EXPAND*, uma expressão do tipo $(x+n)(x+m)$, onde m e n são raízes da equação $(x+n)(x+m)=0$. Existe alguma relação entre números reais m e n com o coeficiente de x e o termo independente de uma equação do tipo $x^2 + bx + c = 0$? Se existir escreva essa relação.

A relação que deveria ser encontrada pelos alunos no último exercício é a de soma e produto das raízes, dada pela seguinte regra: "Uma equação de raízes m e n é: $(x - m)(x - n) = 0$, ou, então, $x^2 - (m+n)x + mn = 0$, na qual $(m+n)$ é a soma das raízes e mn é o produto das raízes."

ATIVIDADES

1) Uma empresa reservou um terreno quadrado de lado **a** metros para a construção de um parque de diversões destinado aos filhos de seus funcionários.

a) O lado do terreno está representado por **?**

b) A área destinada ao parque pode ser representada pela expressão?

Ao analisar o projeto o engenheiro solicitou uma ampliação do terreno em **8** metros na largura e **4** metros no comprimento. Após a ampliação do espaço reservado ao parque:

c) Desenhe a ampliação desse terreno utilizando o material manipulável Algeplan.

d) Qual é uma expressão algébrica que representa a largura do terreno?

e) Qual é uma expressão que representa o comprimento do terreno?

f) A área do terreno após a ampliação pode ser calculada por qual expressão?

g) Você pode afirmar que a área do terreno todo é a soma das áreas de todas as figuras? Justifique.

2) João tem um horta de forma retangular com um lado medindo 5 metros a mais do que o outro e área igual a 50 metros quadrados. Se ele quiser construir uma cerca ao redor da horta, quantos metros de arame deverá comprar?

REFERÊNCIAS

ÁLGEBRA TILES. Disponível em: <http://illuminations.nctm.org/> Software livre Acesso em: 28 nov. 2011.

BOYER, C. B. **História da matemática.** 11ª Reimpressão. São Paulo: Edgard Blücher, 1994.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares da Rede pública de Educação Básica do Estado do Paraná – Matemática:** Curitiba: SEED, 2008.

SOBRE AS AUTORAS

Viviany Fatima dos Santos

Acadêmica do curso de Licenciatura em Matemática na UNIOESTE – câmpus de Cascavel.

Elizangela Mendes Pereira

Acadêmica do curso de Licenciatura em Matemática na UNIOESTE – câmpus de Cascavel.

SOBRE AS ORGANIZADORAS

Andréia Büttner Ciani: Bacharel em Matemática e Mestre em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (Unesp/Rio Claro). Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Professora do Curso de Matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste), câmpus de Cascavel. Membro do grupo de pesquisa Formação de Professores de Ciências e Matemática (FOPECIM) e GEPEMA. Colaboradora do Subprojeto PIBID–Matemática/UNIOESTE.E-mail: andbciani@gmail.com

Arleni Elise Sella Langer: Licenciada em Ciências – Matemática pela Fundação Faculdade de Educação Ciências e Letras de Cascavel (Fecivel/Unioeste). Mestre em Educação pela Universidade Federal do Paraná (UFPR). Professora do Curso de Matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste), câmpus de Cascavel. Membro do grupo de pesquisa Formação de Professores de Ciências e Matemática (FOPECIM). Ex-coordenadora do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID - Unioeste), edital nº 02/2009-CAPES/DEB e ex-coordenadora projeto PIBID – Matemática/Unioeste. E-mail: arleni.sella@unioeste.br

Dulcyene Maria Ribeiro: Licenciada em Matemática e Mestre pela Universidade Estadual Paulista (Unesp/Rio Claro). Doutora em Educação pela Universidade de São Paulo (USP). Professora do Curso de Matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste), câmpus de Cascavel. Membro do grupo de pesquisa Formação de professores de Ciências e Matemática (FOPECIM). Colaboradora do Subprojeto PIBID – Matemática/Unioeste e Coordenadora Institucional do PIBID - Unioeste (edital 2009-Capes). E-mail: dulcyenemr@yahoo.com.br

Francieli Cristina Agostinetto Antunes: Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste). Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Professora do Curso de Matemática da Unioeste, câmpus de Cascavel. Membro do grupo de pesquisa Formação de Professores de Ciências e Matemática (FOPECIM). Colaboradora do Subprojeto PIBID – Matemática/Unioeste. E-mail: francieliantunes@gmail.com

Tânia Stella Bassoi: Licenciada em Matemática pela Universidade Federal do Paraná (UFPR). Mestre em Metodologia de Ensino pela Universidade Estadual do Centro Oeste e Universidade Estadual de Campinas (Unicentro/Unicamp). Doutora em Educação pela Universidade Federal do Paraná (UFPR). Professora do Curso de Matemática na Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste), câmpus de Cascavel. Membro do grupo de pesquisa Formação de Professores de Ciências e Matemática (FOPECIM). Coordenadora do Subprojeto PIBID – Matemática/Unioeste. E-mail: taniastella@ibest.com.br

As unidades didáticas apresentadas neste livro são resultados de uma das ações do subprojeto de Matemática, do projeto *Vivenciando a escola: Incentivo à prática docente*, vinculado ao Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). É fruto das experiências vividas nas escolas, pelos acadêmicos bolsistas e discutidos nos encontros semanais com os professores supervisores, professores universitários responsáveis pela orientação e colegas de projeto. Configura-se um compromisso compartilhado.

A elaboração e a apresentação de cada unidade para os demais participantes do subprojeto revelaram resultados significativos para o processo de ensino e aprendizagem do futuro professor, incluindo sugestões de aplicação nas escolas envolvidas no projeto. Assim, os alunos foram inseridos nos primórdios da pesquisa, tornando-se professores pesquisadores.

Nas unidades didáticas os conteúdos matemáticos são abordados por meio de estratégias diferenciadas.

unioeste
Universidade Estadual do Oeste do Paraná

Pibid
PROGRAMA INSTITUCIONAL DE BOLSA DE INICIAÇÃO À DOCÊNCIA

CAPES

Ministério da **Educação**

GOVERNO FEDERAL
BRASIL
PAÍS RICO É PAÍS SEM POBREZA

EDITORA Evangraf LTDA.

ISBN 978-85-7727-514-4